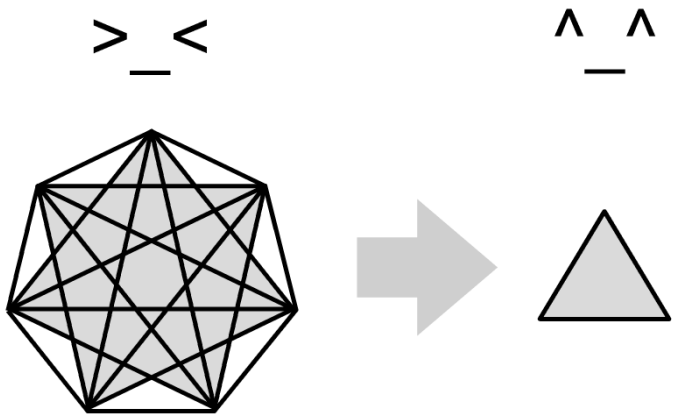
Краткое руководство по эвристикам и решению математических задач.



/math

Что такое математика?

In the realm of ideas, [...] the study of mental objects
with reproducible properties is called mathematics.
Philip J. Davis

Математика бесконечна, как аниме.
Анонимус

Ниже читателю предлагается ознакомиться с рядом тезисов сомнительного характера, которые призваны кратко описать суть, смысл и содержание математики как особой области человеческой деятельности. Приведенный текст практически полностью состоит из чужих идей, расхожих мнений и украденных цитат, и его можно считать плодом коллективного студенческого бессознательного.

***

Математика - это эмпирическое исследование абстрактного мира. Основой этого абстрактного мира служит виртуальная модель реального мира (так называемая наивная физика), которая существует в сознании каждого представителя homo sapiens. Исследуя эту модель с помощью рефлексии, люди «открыли» арифметику, геометрию и логику. В ходе формализации и обобщения первоначальных математических знаний, люди научились создавать универсальные абстрактные конструкторы (теория множеств и т. д.), из которых можно строить виртуальные миры, выходящие далеко за пределы базовой модели реального мира.

***

Математика создавалась людьми интуитивно, непоследовательно и несистематически - и долгое время представляла собой лоскутное одеяло из слабо связанных между собой идей и методов. Кроме того, в начале своего развития математика не представляла собой особую сферу человеческой деятельности, и была тесно переплетена с философией, физикой, религией, мистикой, музыкой, архитектурой, технологией и вообще всем, чем угодно. Формализация интуитивно созданных конструкций происходила постепенно и задним числом. Объединение различных математических интуиций на базе единых формальных оснований произошло только в начале 20 века - причем это объединение потребовало радикального переосмысления и реконструкции всех основных разделов математики. Но сама возможность такого объединения служит доказательством того, что вся человеческая математика основана на некоторых присущих всем людям универсальных принципах мышления.

***

Математика сочетает в себе черты как творческой, так и исследовательской деятельности - более того, она является самой творческой деятельностью на нашей планете. Математики бросают в свое сознание аксиоматическое зерно и затем исследуют миры, которые оно порождает, следуя логическим правилам роста. При этом большая часть математиков является не творцами математики, а ее исследователями; они чаще исследуют созданные другими миры, чем создают свои собственные.

***

Теоретически, все математические миры могут быть полностью описаны в виде текста на формальном языке, но из-за когнитивных ограничений человека такое описание редко оказывается возможным. Чаще всего оно представляет собой сокращенное описание на естественном или частично формализованном языке. Для обеспечения удобного для записи, хранения и чтения размера, математические тексты включают в себя ссылки на другие работы, в которых опущенные подробности даются в более развернутом виде. Иными словами, математический текст почти всегда представляет собой гипертекст.

***

Гедель показал, что даже очень короткие математические утверждения могут иметь сколь угодно длинные доказательства. Также он показал, что в рамках математической теории могут существовать принципиально недоказуемые утверждения. Поэтому в построенных математиками идеальных мирах всегда будут существовать как практически, так и принципиально недостижимые «темные» области.

***

Математическое исследование ведется не формально-логически, а экспериментально-интуитивно, с опорой на некоторые пока еще неизвестные способности человеческого мозга к неформальному решению формальных задач. В ходе построения и исследования математики мозг превращает формальные высказывания (или целые их системы) в абстрактные объекты, которыми можно манипулировать в сознании, исследуя их свойства и законы преобразования. После интуитивного установления истинности некоторого утверждения, люди пытаются найти его формальное доказательство, зафиксировать полученное знание и передать его другим. Интересно, что в различные эпохи и в различных областях математики требования к доказательствам могут очень сильно отличаться.

Заниматься математикой могут не только люди, но и вычислительные машины. Но так как порождаемые миры, как правило, бесконечны, то даже машины не могут полагаться в своих занятиях математикой на последовательный перебор и комбинаторику - они должны научиться «мыслить», то есть находить и создавать подходящие эвристики. В настоящее время люди машины не способны конкурировать с людьми в сфере занятий математикой, но вполне возможно, что рано или поздно они нас догонят и перегонят — причем окончательно и навсегда.

***

Ни одно математическое доказательство нельзя считать верным с вероятностью 100%. Люди являются такими же физическими машинами, как и компьютеры, и точно так же систематически допускают ошибки. Но так как наиболее важные доказательства проверяются и перепроверяются десятками и сотнями людей, то вероятность наличия ошибки в окончательной версии доказательства очень низка.

Тем не менее эта вероятность никогда не равна нулю, а в некоторых случаях весьма велика. Например, согласно статистике, половина математических статей содержит в себе хотя бы одну ошибку. Подавляющее число этих ошибок являются незначительными и могут быть легко найдены и исправлены, но некоторые, даже очень серьезные ошибки, могут оставаться незамеченными в течение десятилетий.

***

Математика, в отличие от других наук, не имеет срока годности. Математические истины находятся вне пространства и времени и не могут быть опровергнуты экспериментально. Если большая часть знаний, полученных в рамках естественных и гуманитарных наук, очень быстро устаревает или оказывается неверным, то математическое знание, будучи один раз найденным, остается актуальным навсегда. Поэтому накопленный ходе тысячелетнего развития математики объем знаний поистине феноменален и при этом очень быстро растет. Если еще сто лет назад одному человеку было вполне по силам изучить все основные разделы математики, то в настоящее время практически никто не знает даже одной сотой ее части.

Сейчас на планете живет и работает более 100000 профессиональных математиков. В прикладных областях их количество превышает десятки миллионов. Уже в 70-е годы прошлого века каждый год публиковалось порядка 200000 новых теорем, сейчас же это число в несколько раз больше. Количество направлений математических исследований постоянно растет - если в 70-х годах их было примерно 3000, то теперь около 6000[1].

***

Математическое знание можно представить в виде графа связанных друг с другом истинных утверждений. Этот граф очень неоднороден, его центр представляет собой плотно переплетенное ядро (core math) из давно известных и хорошо разработанных математических дисциплин, от которого в разные стороны разбегаются тысячи ветвей. В каждой такой ветви десятки и сотни математиков сплоченно трудятся в рамках одной из многочисленных исследовательских программ. Эти ветви постоянно дают новые побеги в самых неожиданных направлениях. Рано или поздно кто-то обнаруживает тесную связь между удаленными друг от друга ветвями, после чего автору открытия дают премию Филдса, а уже упомянутые ветви сплетаются или сливаются между собой, делая граф более плотным. Разрастание и сплетение происходит циклически, в результате чего центральное ядро математики постоянно увеличивается в размерах.

***

В центре математического графа лежит т. н. micro core - совокупность тесно связанных с собой базовых математических знаний и интуиций. Micro core представляет собой основу "математической культуры". О том, что оно собой представляет, можно прочитать в книге Saunders Mac Lane «Mathematics, Form and Function».

Центральное ядро окружено mini core, которое состоит из знаний, примерно соответствующий двум первым курсам математического факультета (топология, алгебра, математический анализ, теория чисел) или лиценциату НМУ.

1 https://mathscinet.ams.org/msc/pdfs/classifications2010.pdf

Еще больший объем информации содержится в core math. Core math – это необходимый для исследовательской работы комплекс знаний, примерно соответствующий бакалавриату математического факультета. Разные математики по-разному представляют себе структуру этого ядра - например, программа Вербицкого[2], рекомендации Теренса Тао и дорожная карта от MIT[3] (Рис. 1) отличаются друг от друга довольно сильно.

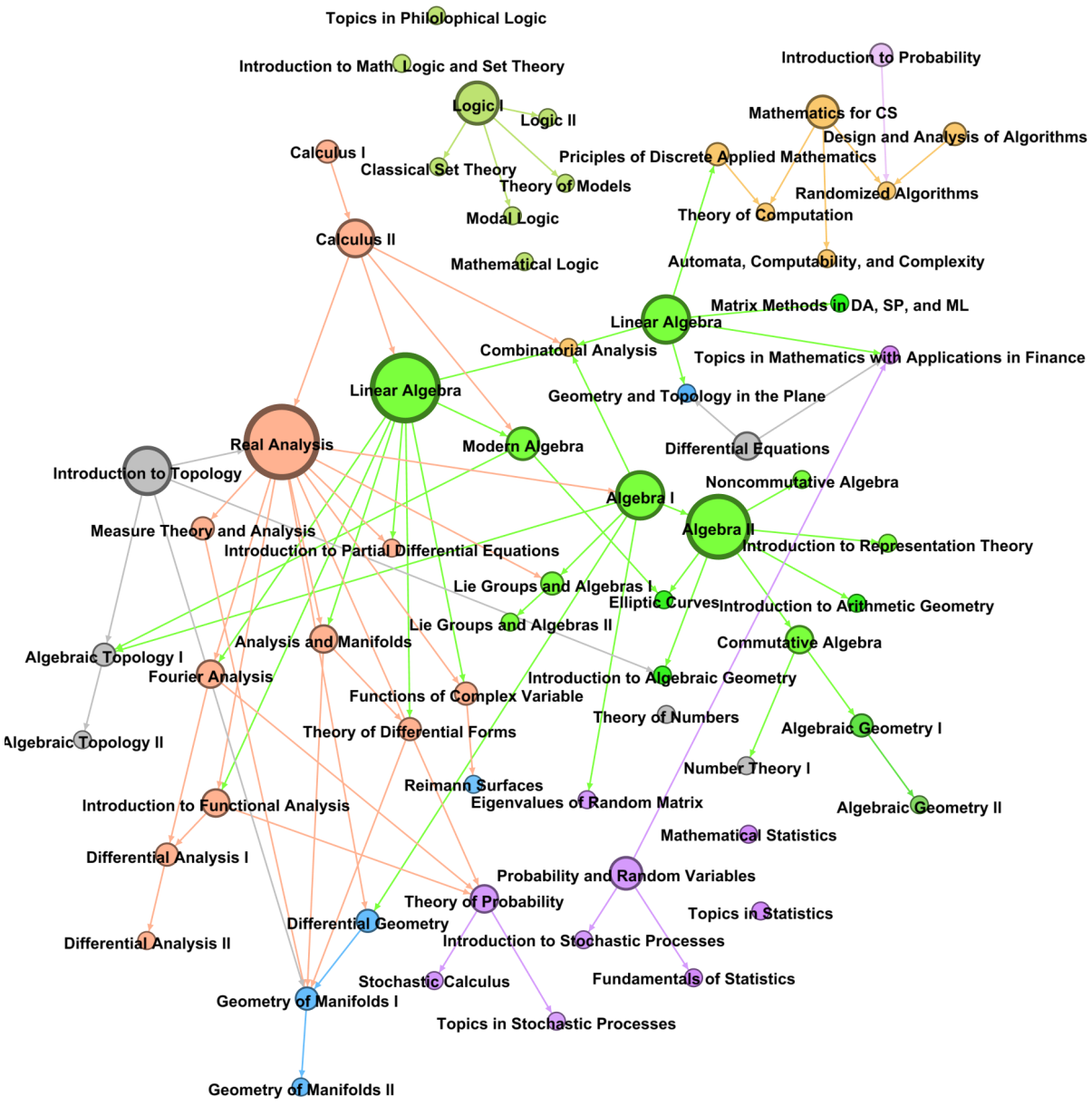


Рис. 1. Math core в соответствии с программой от MIT.

После освоения core math, будущий математик выбирает одну или несколько ветвей, в рамках которых его исследовательская деятельность все больше специализируется. Более подробно прочитать об основных направлениях математики можно в таких книгах как «The Princeton Companion to Mathematics» и «The Princeton Companion to Applied Mathematics».

2 http://verbit.ru/Job/HSE/Curriculum/all.txt

3 https://math.mit.edu/academics/undergrad/roadmaps.php

Как изучать математику?

Ниндзя - искусство ждущих.
Роман Михайлов

Математика это не трудно. Математика - это долго. Насколько долго, можно узнать из стандартных учебных планов математических факультетов. В среднем это 8000 учебных часов в бакалавриате и еще 4000 в магистратуре. Для бакалавриата это составляет приблизительно 5,5 часов в день на протяжении четырех лет, а с учетом времени, потраченном на отдых и болезни, полноценные 8 часов. Поэтому занятия математикой очень трудно, а зачастую и попросту невозможно сочетать с работой и активной социальной жизнью.

Ускорить этот процесс нельзя. Математика - это не столько множество фактов, сколько набор определенных навыков мышления. Необходимые для формирования и закрепления этих навыков нейронные связи формируются медленно. Математику нельзя вызубрить наизусть. Эффективное изучение математики основано на понимании материала, а понимание очень редко приходит сразу - иногда для этого требуются недели, месяцы и даже годы. Поэтому основной принцип изучения математики - это регулярность и систематичность. Материал нужно осваивать неторопливо и постепенно, но желательно каждый день и без больших перерывов в учебе. И лучше изучать несколько разделов параллельно, чем замыкаться на чем-то одном.

За время учебы в бакалавриате среднестатистический студент-математик должен прочитать примерно 50 учебников. При среднем размере одного учебника в 500 страниц это дает порядка 20 страниц текста в день. Кажется, что это довольно немного - но информативность математических текстов такова, что на чтение и понимание этих 20 страниц иногда уходит целый день, а то и неделя[#]. Но все-таки ориентироваться при изучении математики следует как раз на эти 20 страниц в сутки. Если ты читаешь меньше, то тебе нужно развивать навык чтения математических текстов, если больше — ты, скорее всего, пренебрегаешь пониманием и слишком быстро бежишь вперед.

Для справки ниже приведены ссылки на учебные планы математических факультетов ведущих российских вузов.

Факультет математики Высшей Школы Экономики.
https://www.hse.ru/standards/plans/1476729/
Механико-математический факультет МГУ.
https://math.msu.ru/uplans
Математико-механический факультет СПбГУ.
https://www.math.spbu.ru/rus/plans-2.html

Анонимус предлагает измерять скорость изучения математики в гротендиках.
Один гротендик (1 Grot) - это скорость чтения, равная 20 страницам в день.

Учебный математический текст состоит из следующих трех элементов. Стоит отметить, что все три составляющие чрезвычайно важны.

1. **Мотивационная часть.** Это текст на естественном языке с неформальным изложением материала. В мотивационной части излагается краткая история создания изучаемой концепции и ее предполагаемое авторство, объясняется значение концепции в контексте изучаемого предмета и ее связь с другими идеями, приводятся наглядные примеры и варианты использования в практических приложениях. Мотивационная часть призвана объяснить читателю «смысл» того, что он изучает.
2. **Формальная часть.** Это возможно строгое (уровень строгости зависит от подготовки читателя) изложение материала с использованием специальной терминологии математической нотации.
3. **Контрольная часть.** Вопросы, примеры и задачи по только что изученному материалу.

Формальная часть обычно состоит из следующих элементов.

1. **Аксиома.** Базовое предположение, не требующее доказательства. Аксиомы постулируются, а не выводятся.
2. **Определение.** Это объяснение математического смысла определяемого понятия.
3. **Предложение (proposition).** Истинное утверждение, представляющее незначительный интерес.
4. **Теорема.** Истинное утверждение, представляющее значительный интерес.
5. **Лемма.** Истинное утверждение, которое используется для доказательства других утверждений.
6. **Доказательство.** Демонстрация (то есть объяснение) того, почему предложение, лемма или теорема верна.
7. **Следствие (corollary).** Истинное утверждение, полученное простой дедукцией из теоремы.
8. **Гипотеза (conjecture).** Утверждение, которое с большой степенью вероятности является истинным, но которое пока не доказано.

Организована формальная часть следующим образом. Сначала дается **определение** некоторой математической структуры, удовлетворяющей **аксиомам**. Далее простые свойства этой структуры описываются с помощью **предложений**. Затем более сложные свойства структуры описываются с помощью **теорем**. Предложения и теоремы доказываются. Так как **доказательство** теоремы, как правило, является довольно громоздким, то его проводят поэтапно - сначала доказывают вспомогательные утверждения в виде **лемм**, а затем используют эти леммы для доказательства теоремы. Из доказанной теоремы выводятся наиболее важные и интересные **следствия**.

Как правило, каждая глава учебника также содержит примеры **гипотез**, которые, в отличие от теорем, пока еще не доказаны, но представляют значительный интерес.

Общие советы по чтению математического текста.

1. Читать учебник нужно **с четко определенной целью**. Нужно ясно осознавать, для чего ты сейчас изучаешь данный материал: для общего ознакомления, для того, чтобы освежить в памяти уже изученное, для подготовки к экзаменам, в качестве необходимого пререквизита для более сложной темы и т. д.
2. Чтение должно быть **активным**. Конспектирование и комментирование (пересказ своими словами) материала обязательно.
3. Математические тексты следует читать **не в строгом порядке, а систематически и регулярно.** Линейный порядок изложения не способен достаточно ясно описать сложную и многомерную структуру предмета. Поэтому при изучении математики приходится постоянно возвращаться назад, забегать вперед или отвлекаться на чтение дополнительного и вспомогательного материала. Если ты надолго застрял на одном месте и ничего не можешь понять, то тебе следует перечитать предыдущие главы, перейти к следующей главе или изучить материал по другому учебнику.
4. Сначала изучи мотивационную часть текста. Потом ознакомься с **определениями, теоремами и примерами**. За **доказательства** нужно браться в последнюю очередь, и только после того, как ты на конкретных примерах убедился, что теорема скорее всего верна. Исторически все теоремы доказывались именно так: сначала возникала уверенность в их истинности и только потом находилось доказательство.
5. **Решай задачи и выполняй упражнения.** Математическая интуиция вырабатывается только на практике, без решения задач ты никогда и никуда не продвинешься. Сохраняй решенные задачи в личном архиве - скорее всего, они тебе однажды понадобятся.
6. **Регулярно подводи итоги.** Что ты изучил в этой главе? Как этот материал соотносится с уже известным? Что ты собираешься изучать дальше?

Определения, **теоремы** и **доказательства** являются наиболее важными элементами математического текста. Остановимся на них более подробно.

Как читать определения?

1. Изучи отдельные элементы формулировки по отдельности и в сочетании друг с другом.
2. Попробуй понять «суть» того, что с чем имеешь дело. Визуализируй структуру, о которой говорится в определении, рассмотри ее в динамике.
3. Разберись, каким образом новая структура получена из уже изученных. Можно ли ее разобрать, есть ли у нее уже известные составляющие? Входит ли она в состав более сложной структуры?
4. Изучи приведенные в учебнике примеры структуры.
5. Придумай свои примеры, исследуй типичные, элементарные и экстремальные случаи.
6. Придумай различные виды контрпримеров. Выясни, что свойства структуры нужно изменить, чтобы превратить пример в контрпример.

Как читать теоремы?

1. Отдельно изучи посылки и заключения. Оцени, насколько сильными они являются. Попробуй их осилить и ослабить.
2. Сравни теорему с уже изученными. Что в них есть общего? В чем они отличаются? Какие детали и нюансы формулировки наиболее важны?
3. Объясни, что теорема "делает" и как ее можно использовать.
4. Визуализируй теорему.
5. Примени теорему к типичным примерам.
6. Примени теорему к элементарным и экстремальным примерам.
7. Примени теорему к контрпримерам. Почему она становится неверна?
8. Сформулируй теорему как своими словами, так и на формальном языке.
9. Обобщи теорему. Можно ли найти какое-то более общее утверждение, для которого данная теорема является частным случаем?

Читать и понимать доказательства намного труднее, чем определения и теоремы. Доказательства ищутся не так, как излагаются. Строгое и последовательное изложение доказательств, приведенное в учебниках, не дает никакого представления о том, каким образом и на основании каких соображений оно было найдено. Формальные доказательства очень трудно понять, если ты не знаешь истории их поиска - поэтому для лучшего понимания очень полезно читать дополнительную литературу по истории развития математических идей.

Как читать доказательства?

1. Изучи мотивационную часть. Что доказывается? Зачем доказывается? Какими методами?
2. Разбей цепь доказательства на составляющие и изучи каждое звено отдельно. Исследуй, какие методы были использованы на каждом шаге доказательства.
3. Найди **критические звенья** в цепи доказательства. Какие **наиболее существенные предположения** теоремы позволили сделать данный переход в доказательстве? Что будет, если ослабить или усилить эти предположения?
4. Визуализируй доказательство.
5. Проверь доказательство на конкретном примере.
6. Проверь доказательство на контрпримере. Из-за каких свойств контрпримера оно стало неверно?
7. Не пытайся запомнить доказательство с помощью зубрежки. Попробуй его просто понять.
8. Дополнительно: проверь текст на наличие опечаток и ошибок. Математическая литература печально известна большим количеством неточностей. Иногда ошибки в учебнике удается найти только к десятому изданию.

Как решить задачу?

Математик начинает доказывать теорему только
тогда, когда убедится, что она верна.
Типичный Математик

Задачей в математике называется совокупность исходных утверждений (данных) и целевых утверждений (требуемое), которые должны быть получены из исходных данных с помощью заданных правил вывода.

Рассмотрим эти три составляющие более подробно (Рис. 2).

1. Исходные данные (A). Задачи редко формулируются абсолютно строго. При этом большая часть исходных данных (контекст) предполагается известной по умолчанию и явным образом не указывается. Поэтому неформально поставленные задачи требуется предварительно формализовать (например, записать условие с помощью кванторов), удалить избыточные и добавить недостающие данные.

2. Целевое состояние (B). Целевое состояние также требуется предварительно уточнить и четко сформулировать. В качестве целевого состояния обычно предлагается либо формальное утверждение, которое нужно доказать, либо элемент из некоторого множества, который нужно найти (вычислить), либо объект, который нужно построить. В первом случае задача называется **задачей на доказательство**, во втором - **задачей на вычисление**, в третьем - **задачей на построение**. Как правило, задачи на доказательство являются наиболее трудными. В задаче может быть несколько целевых состояний (например, не один, а два и более вопроса, которые могут быть связаны или не связаны между собой). При анализе условия требуется отдельно рассмотреть каждое целевое состояние и все возможные связи между ними.

3. Правила вывода (C). Правила вывода практически всегда считаются известными по умолчанию, но в отдельных случаях задаются явным образом. В задачах на доказательство это правила логики, в задачах на вычисление это допустимые операции над типом данных, в задачах на построение это правила конструирования объектов. Если правила вывода явно не указаны, то почти наверняка они соответствуют правилам, типичным для домена задачи. Например, для алгебраической задачи это будут операции умножения и сложения, для геометрии - аксиомы Евклида и т. д.

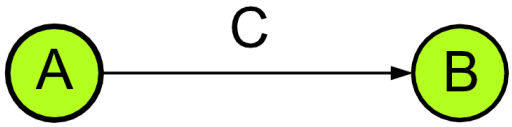


Рис. 2. Элементарная схема задачи.

Задачи в математике очень сильно различаются по своему уровню сложности и назначению. Учебные задачи обычно довольно просты и служат вспомогательным средством для освоения учебного материала; на их решение дается достаточное количество времени. Проверочные задачи (контрольные работы, экзамены) обычно сложнее и для их решения требуется уметь применять большой объем ранее изученного материала; время на их решение строго ограничено. Олимпиадные задачи служат инструментом для выявления людей с высокими математическими способностями - они довольно сложны, но при этом предполагается, что они могут быть решены быстро, так как время на их решение ограничено. Математические исследовательские задачи, как правило, сложны чрезвычайно, и времени на их решение требуется очень много - от нескольких месяцев до нескольких столетий.

Очень часто даже основательное владение материалом не позволяет человеку эффективно решать задачи. Практика показывает, что на успех в деле решения задач влияет множество других факторов. Например, в своей книге «Mathematical Problem Solving» (1985) математик и преподаватель Алан Шенфилд описывает четыре таких фактора.

1. **Исходные данные.** Под исходными данным Шенфилд понимает всю совокупность знаний в данном домене, включая декларативное знание (аксиомы, определения, объекты, леммы, теоремы, правила вывода) и процедурное знание (стандартные алгоритмы вычислений, правила конструирования и преобразования объектов, особые приемы и трюки).

2. **Эвристики.** Эвристиками называется множество методов общего характера, позволяющих эффективно использовать имеющиеся знания для решения задач.

3. **Метакогнитивные навыки.** Навыки запуска, остановки и переключения когнитивных процессов, а также методы оценки эффективности выбранных методов решения. Иными словами, это навыки доступа к знаниям и управления процессом решения задачи.

4. **Убеждения.** Это совокупность представлений человека о себе и о среде, в которой происходит решение задачи. Шенфилд указывает несколько стандартных проблем, мешающих решению задачи. Это слишком низкая (или высокая) самооценка, отсутствие навыка применения абстрактных знаний в реальной жизни, наличие ложных убеждений (уверенность в том, что задачи всегда имеют решение, что они должны решаться быстро, что неумение их решать свидетельствует об общем отсутствии способностей и т. д.)

Каждый из перечисленных факторов может оказаться критическим. Можно идеально знать материал и не уметь его применять. Можно владеть огромным арсеналом методов, но не знать, какие из них наиболее эффективны в данном конкретном случае. Можно хорошо подготовиться к экзамену, но не сдать его из-за низкой самооценки. Можно иметь высокие математические способности, но избегать занятий математикой из-за ложного убеждения, что "математикой могут заниматься только гении".

Как показала практика обучения студентов, одним из решающих факторов в решении математических задач является владение эвристиками. Эвристики могут эффективно использованы для решения задач среднего уровня (тестовых, экзаменационных, олимпиадных). Для решения сложных исследовательских задач, наряду с эвристиками люди используют другие, более специфичные методы и приемы.

Моделью для процесса поиска решения задачи может служить процесс нахождения пути в ориентированном графе. При этом вершинами такого графа будут являться истинные высказывания, а ориентированными ребрами - правила вывода, позволяющие переходить от одного высказывания к другому (Рис. 3).

Условные обозначения в графе.

P/P' - исходные данные/исходное целевое значение. (Problem).

E/E' - эквивалентное условие/эквивалентное целевое значение (Equivalent problem).

S/S' - похожая задача/похожее целевое значение (Similar problem).

A/A' - аналогичная задача/аналогичное целевое значение (Analogous problem).

G/G'- общая проблема/общее целевое значение (General problem).

c - частный случай (case).

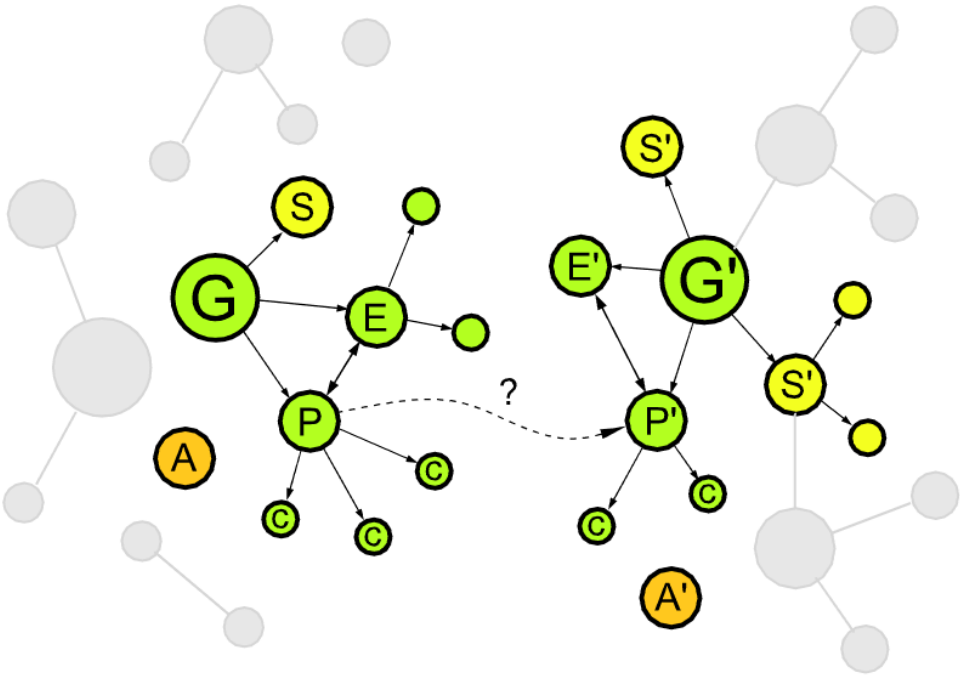


Рис. 3. Граф высказываний.

В типичной задаче нам даны исходные данные P и целевое значение P'. Чтобы решить задачу, мы должны показать, что между P и P' существует некоторый путь (последовательность логических выводов, вычислений и операций построения объекта). Идеальный путь, когда задача решается в один ход, выглядит так (Рис. 4).

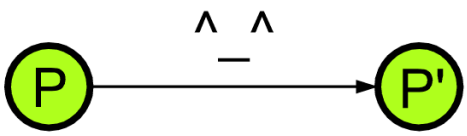


Рис. 4. Идеальное решение.

В реальности процесс решения выглядит примерно так, как показано на Рис. 5. В реальном решении мы шесть раз уперлись в тупик, два раза ошиблись в логическом выводе, потратили несколько часов, блуждая по кругу, и только чудом смогли из него выйти, доказав переход 6-7 по контрапозиции. Чтобы решить не учебную, а реальную исследовательскую задачу, нам бы пришлось ошибаться и блуждать в тысячу раз дольше.

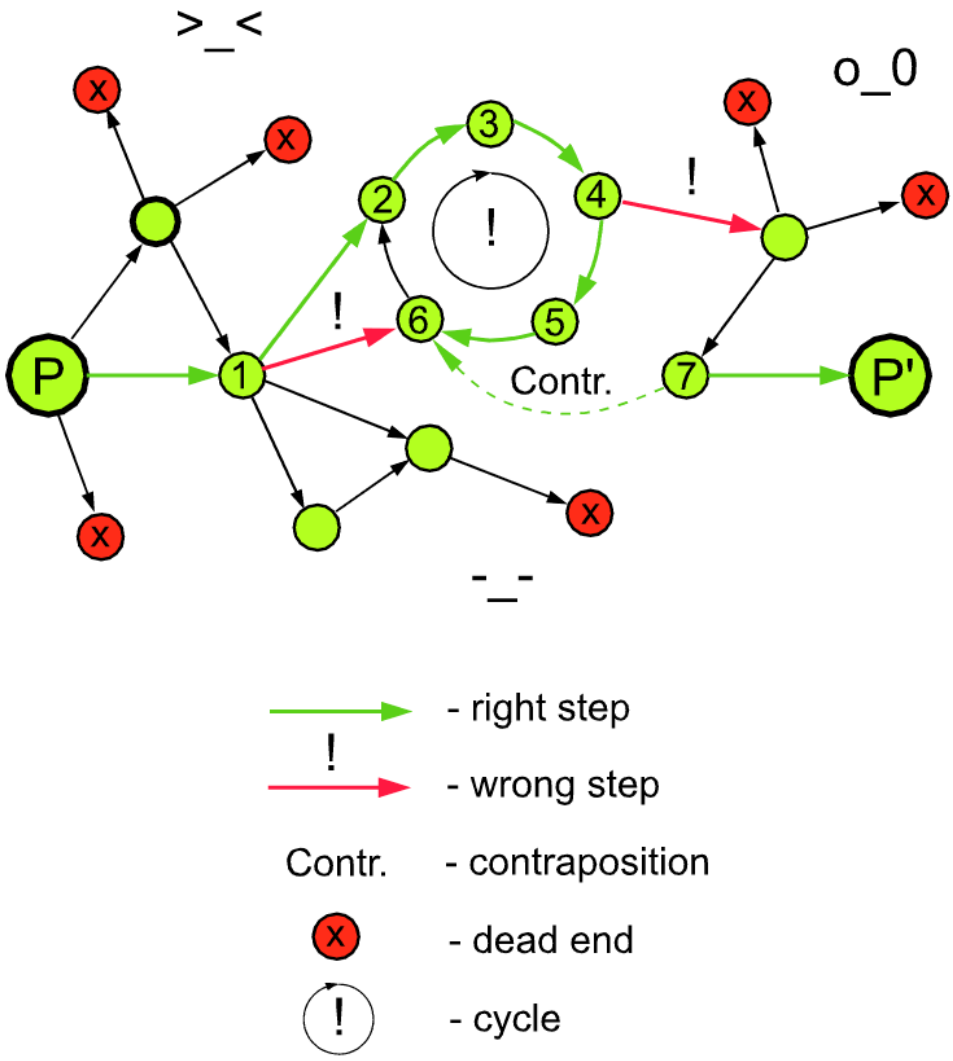


Рис. 5. Реальное решение.

Эвристики служат инструментом для более эффективной навигации в графе решения задачи. Из-за астрономических размеров это графа человек не может решить задачу с помощью последовательного перебора всех возможных путей. Вместо этого он должен использовать врожденную интуицию, заставляя свое подсознание генерировать различные гипотезы, которые затем можно будет проверить сознательно. Мощность бессознательных процессов мозга огромна и превышает наши сознательные способности на несколько порядков. Мы не можем пользоваться этими мощностями непосредственно, но можем стимулировать и направлять наши бессознательные процессы с помощью некоторых эвристических приемов.

Процесс решения любой математической задачи можно разбить на несколько шагов. Более подробно мы опишем их в соответствующих разделах.

Раздел 0 - предварительная подготовка.

Разделы 1-7 представляют собой описание приемов, стимулирующих генерацию гипотез. Человек не способен генерировать гипотезы сознательно и целенаправленно - этим занимается подсознание, которое обрабатывает данные параллельно и отправляет в сознание конечный результат своей работы. После применения каждого приема нужно остановится и обдумать задачу. Возникшие в ходе размышлений гипотезы лучше сразу записать. Каждую гипотезу следует проверить: при этом неверные нужно сразу отбросить, а перспективные следует разрабатывать дальше. Если новых гипотез не появилось, то нужно попробовать применить следующий прием - и так далее.

Раздел 8 посвящен приемам выхода из тупика при решения задачи. Эти приемы направлены на преодолении инерции мышления, изменение точки зрения и стимулирование новых ассоциаций.

Раздел 9 посвящен проверке найденной гипотезы и анализу решения. После того, как решение найдено, его требуется проверить, строго сформулировать и тщательно проанализировать.

0 Предварительная подготовка

Нельзя просто так взять и решить любую задачу, для этого нужна хотя бы минимальная подготовка. Подготовительная часть, как правило, состоит из нескольких этапов.

1. **Изучение материала** - то есть освоение тех областей математики, в которых человек собирается решать задачи.

2. **Изучение эвристик** - как общих, так и характерных для изучаемого домена. Чем специфичнее раздел математики, тем более специфичные приемы придется использовать.

3. **Прорешивание стандартных задач** по каждой теме и организация личного **архива** решенных задач вместе с типичными приемами их решения. При этом нужно обратить особое внимание на то, каким типам задач какие методы соответствуют — это облегчит выбор подходящего метода в будущем. Кроме того, желательно научиться решать каждую задачу несколькими методами сразу.

4. **Развитие метакогнитивных навыков.**

   - Быстрое понимание того, что требуется в задаче (**навык строгой формулировки задачи**). Практика показывает, что у студентов этот навык развит очень плохо, потому что в школе никто специально не занимается его формированием. Развить этот навык достаточно просто: для этого достаточно пройтись по условиям всех задач в каком-нибудь сборнике и для каждой задачи записать ее строгую формулировку в кванторах. Сами задачи при этом решать необязательно.

   - Классификация задачи (**навык узнавания , определение принадлежности к домену**). Задачи очень часто формулируются так, что с первого взгляда практически невозможно понять, к какой области математики они относятся. Нужно научиться быстро распознавать «глубинную структуру» задачи и определять, какому математическому домену она принадлежит. Этот навык можно развить тем же методом, что и предыдущий — просмотром множества условий задачи и выявлением их «глубинной структуры».

   - Припоминание аналогичных задач и методов их решения, а также основых теорем, алгоритмов и эвристик из домена, к которому принадлежит задача (**навык обращения к памяти**). Очень часто студенты на экзамене не могут вспомнить материал, который прекрасно знают, потому что знания в их голове расположены не системно, а линейно, в порядке изложения учебного материала. Для борьбы с этой проблемой можно использовать структурированное представление знаний. Например, можно очень четко запомнить список из 20% самых важных концепций, а остальные 80% равномерно распределить вокруг них. Таким образом, на периферии каждой важной теоремы окажется четыре менее важных — и вспомнив одну теорему, мы сможем тут же припомнить еще четыре.

- Дополнительно следует научиться оценивать эффективность процесса решения задачи (**навык создания метрик, умение оценивать эффективность применяемых методов**). Оценка эффективности нужна для выбора наиболее перспективной эвристики, для избегания хождений по кругу и для своевременной остановки процесса решения, когда он зашел в тупик. Даже самые простые правила могут оказаться полезны. Например, если ты находишься на экзамене, застрял на полпути решения задачи и в течение 15 минут не можешь продвинуться дальше, то нужно немедленно бросить эту задачу и перейти к новой. Потому что в условиях экзамена экономия времени критически важна.

5. **Психологическая подготовка** и формирование правильных убеждений.

   - **Не все задачи имеют решение** (такая задача может попасться даже на экзамене).

   - **Никто не в состоянии решить все задачи на свете.** Нужно стараться решить как можно больше задач, но не обязательно (да и невозможно) решать их все. Следует расставлять приоритеты, экономить время и двигаться от простого к сложному.

   - **Задача не обязана решаться быстро.** Поиск решения может потребовать значительного количества времени - иногда это полчаса, иногда целых триста лет. Любая задача может быть решена при достаточных запасах терпениях и настойчивом продвижении к цели.

   - **Если задача очень долго не решается, это не значит, что у тебя нет способностей к математике.** Скорее всего, ты просто плохо знаешь материал, не овладел ключевыми эвристиками, у тебя не хватает опыта или не развиты метакогнитивные навыки. Всему этому можно научиться.

1 Знакомство с задачей

1. Задача формализуется, уточняется и дополняется (см. **три составляющие задачи**). Лишние данные удаляются, недостающие добавляются. Допустимые операции преобразования (C1, C2, C3...) указываются явным образом.

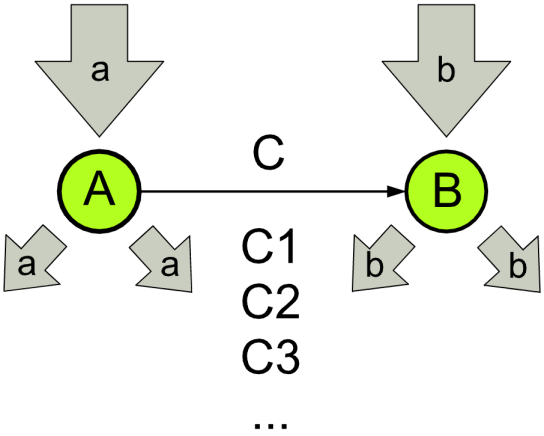


Рис. 6. Знакомство с задачей.

2. Определяется домен задачи. В учебных и экзаменационных задачах составляющие, как правило, принадлежат одному домену (то есть алгебраические задачи решаются алгебраическими методами, геометрические - геометрическими и т. д.) Неправильное определение домена может очень сильно затруднить решение задачи.

3. Приводятся эквивалентные формулировки задачи внутри домена. Одна из типичных переформулировок внутри домена - **замена понятий их определениями** (метод Паскаля), то есть более детальное представление исходных данных и целей. Нужно привести как можно больше эквивалентных формулировок с разной степенью детализации и попытаться найти связи между элементами исходных данных и целей. Также нужно постараться найти что-то общее между элементами исходных данных и целей — существует ли какая-нибудь концепция X, которая связывает исходные данные с тем, что требуется найти?

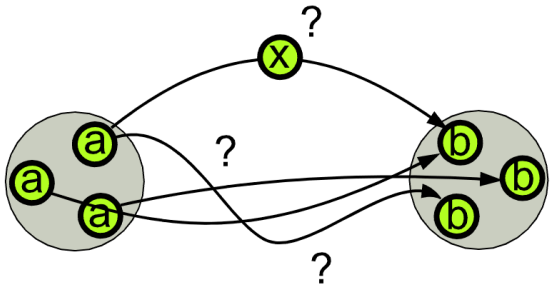


Рис. 7. Детальное рассмотрение исходных данных.

4. Приводятся эквивалентные формулировки задачи в терминах другого домена. Такая переформулировка позволяет использовать для решения задачи принадлежащий другому домену набор инструментов (типичный пример: алгебраическое и геометрическое представление одной задачи).

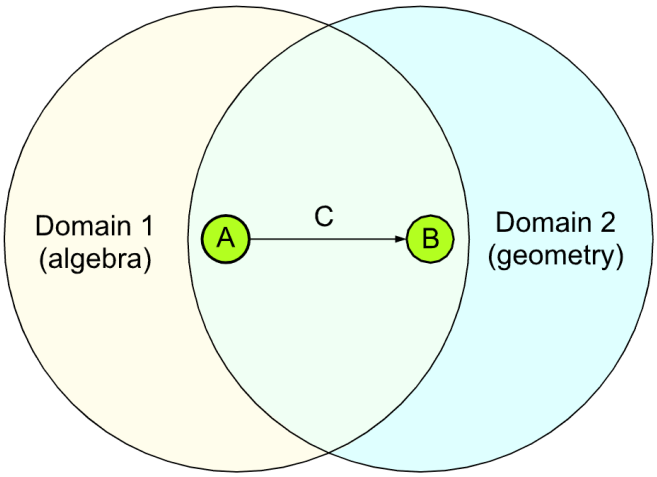


Рис. 8. Задача может принадлежать нескольким доменам сразу.

5. Задача сравнивается с ранее решенными задачами из соответствующего домена. Процесс сравнения основан на «узнавании». Он происходит бессознательно — нужно некоторое время покрутить в голове задачу и попытаться понять, на «что она похожа». Если что-то подобное ранее уже встречалось, то весьма вероятно, что оно всплывет в памяти само собой. Если текущая задача эквивалента, аналогична или очень похожа на одну из ранее решенных задач, то можно сразу попробовать решить ее уже известным способом.

6. Если задача не похожа ни на одну из предыдущих, то нужно вспомнить - и по возможности выписать - типичный для данного домена набор инструментов (аксиом, теорем, алгоритмов, типичных объектов, операций и правил вывода). Как правило, 80% задач уже на этом этапе решаются «в лоб» с помощью 20% стандартных инструментов.

Специальные проверки.

7. **Проверка задачи «на хитрость».** В учебной и олимпиадной практике задачи очень часто составляются так, что для их решения требуется применить не стандартный метод, а весьма специфический и малоизвестный за пределами математических школ и кружков трюк. Эти трюки являются частью математического фольклора и их можно найти в сборниках для подготовки к математическим олимпиадам.

8. **Проверка задачи «на подлость».** Иногда задача специально формулируется так, чтобы подтолкнуть человека к неправильному решению. Например, в ее формулировке имеются нюансы, которые требуют дополнительного учета особых случаев в окончательном решении.

9. **Проверка задачи «на гроб».** Очень часто в список задач включаются задачи, не имеющие решения вообще, либо имеющие простой, но **чрезвычайно** трудоемкий алгоритм решения. Эти задачи нужны, чтобы заставить человека надолго застрять и напрасно потратить отведенное на экзамен время.

2 Визуализация

Визуализация математических структур позволяет использовать для решения задачи огромные вычислительные ресурсы зрительной коры (для сравнения: символьное линейное мышление позволяет обрабатывать 3-16 бит/с, визуальное параллельное - 10^6 бит/с). Визуализация - это отображение математической структуры в декартову плоскость (по сути, нестрогая переформулировка задачи в терминах геометрического домена). Большинство структур, встречающихся в учебных задачах, достаточно просты, чтобы при таком отображении потери информации были незначительны.

Человеческое зрение позволяет легко находить многомерные паттерны, периоды, циклы, рекуррентные отношения, симметрии и самоподобия, определять топологические свойства объектов, их размеры и расстояния между ними, изучать отношения, функции, корреляции, логические зависимости и другие структуры.

Стандартные методы визуализации включают в себя:

1. Двумерные изображения геометрических объектов.
2. Двумерные и трехмерные графики функций и отношений.
3. Комбинаторные объекты (разбиения, схемы с шарами и ящикам, треугольник Паскаля и т. д.)
4. Векторные структуры.
5. Графовые модели.
6. Диаграммы отображений.
7. И множество других.

Визуализация является одной из самых сильных эвристик. Каждую задачу, которая не решается сразу, нужно визуализировать. Теме визуализации посвящено множество книг, в которых подчеркивается важность этой темы и приводятся примеры.

1. Nelsen R., «Proofs without words 1. Exercises in visual thinking», 1993.
2. Nelsen R., «Proofs without words 2. More exercises in visual thinking», 2000.
3. Roger Nelsen, «Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics», 2006.
4. John Stillwell, «Numbers and Geometry», 1998.

3 Формирование количественного

и качественного представления о задаче

Далеко не каждая задача легко поддается визуализации. Но общее представление о задаче можно получить и другими способами. Например, мы можем «измерить» задачу, то есть составить интуитивное представление о ее основных характеристиках: «размерах», «форме» и «поведении».

Для этой цели мы можем использовать следующие методы качественного и количественного анализа.

1. Определение основных свойств, параметров, характеристик задачи. Сколько в задаче различных условий? Какие из них можно варьировать, а какие жестко фиксированы? Какие значения они могут принимать (дискретные, непрерывные, бесконечные, ограниченные)?
2. Поиск и анализ симметрий в задаче.
3. Поиск и анализ рекуррентных отношений, самоподобия, фрактальности в задаче.
4. Исследование структур и подструктур. Можно ли разложить объекты задачи на элементы? Каковы свойства этих элементов? Есть ли в задаче замечательные структуры — деревья, циклы, периодические конструкции?
5. Поиск «странных» и «интересных» объектов. Экстремумы, сингулярности, разрывы, пропуски и другие аномалии.
6. Фиксирование одних параметров и варьирование других. Выявление зависимости одних параметров от других. Выявление свойств, не изменяющихся при преобразованиях - так называемых **инвариантов**.
7. Подстановка различных значений в функции, чтобы понять ее поведение.
8. Подсчет различных количественных характеристик объектов в задаче (количество элементов, расстояния, нормы, площади, объемы, мощности множеств и подмножеств, предподсчеты в алгоритмах и т. д.)

После того, как мы выявили основные качественные и количественные характеристики задачи, нужно рассмотреть взаимосвязи между ними. Влияют ли одни характеристики на другие? Насколько сильно это влияние? Какие характеристики выявляют «суть» задачи наиболее полно?

4 Решение аналогичной задачи

Исследование задачи, очень похожей на нашу, может дать подсказку для ее решения. «Сходство» задач определяется степенью соответствия между их структурами. Примерами похожих задач являются эквивалентные задачи (в идентичных и различных доменах), общие и частные случаи, похожие и аналогичные задачи.

1. **Решение эквивалентной задачи в другом домене** (Рис. 9). Если задача не решается в одной формулировке, то можно попробовать решить ее в другой. Эквивалентные задачи полностью изоморфны исходной задаче — поэтому решение эквивалентной задачи автоматически дает нам решение исходной.

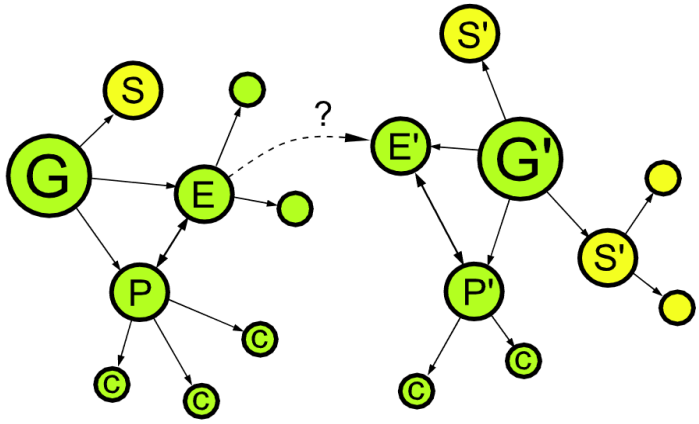


Рис. 9. Вместо задачи PP' мы можем решить эквивалентную ей задачу EE'.

2. **Решение эквивалентной задачи в том же домене**. Если в домене задачи существуют эквивалентные преобразования, то мы можем с их помощью значительно упростить исходные данные и облегчить процесс поиска решения. Следующие приемы являются типичными в рамках данного подхода.

   - Рассмотрение случая «без потери общности» (WLOG).
   - Эквивалентные преобразования: замена переменных, переход к другим координатам, переход от явного к рекурсивному определению и т.д.
   - Перестановка, упорядочение, сортировка элементов, поиск симметрии в задаче.
   - Изменение количества и формы элементов: удаление, добавление, увеличение, уменьшение, перенос, поворот, отражение, растяжение, сжатие, арифметические, логические и другие операции.

3. **Изучение частных случаев.** Данный метод аналогичен методам «измерения» задачи, но если раньше мы пытались получить общее представление о задаче, то теперь мы изучаем ее особенности более детально (раньше «разведка местности» проводилась с самолета, а теперь мы движемся по ней пешком).

   - **Поиск паттерна.** Изучается сразу целый ряд частных случаев (например, при n = 1, 2, 3…) и ищется общая зависимость. Структура ряда может быть произвольной — например, мы можем рассмотреть только четные или только нечетные числа, простые числа, степени двойки и т. д.

   - **Экстремальный случай.** Рассматривается **с**амый простой и/или самый сложный объект, максимальное/минимальное значение и т. д.

   - **Симметричный случай.** Выбираются противоположные, центральные, перевернутые либо другие, имеющие отношение к симметрии объекты.

   - **Характерный случай.** К характерным случаям относятся такие, которые могут очень сильно упростить структуру задачи (например, канонические виды записи уравнений и т. д.)

   - **Типичный случай.** Выбирается наиболее характерный, "среднестатистический" или чисто случайный объект. Типичные случаи очень часто используются для проверки уже найденного решения.

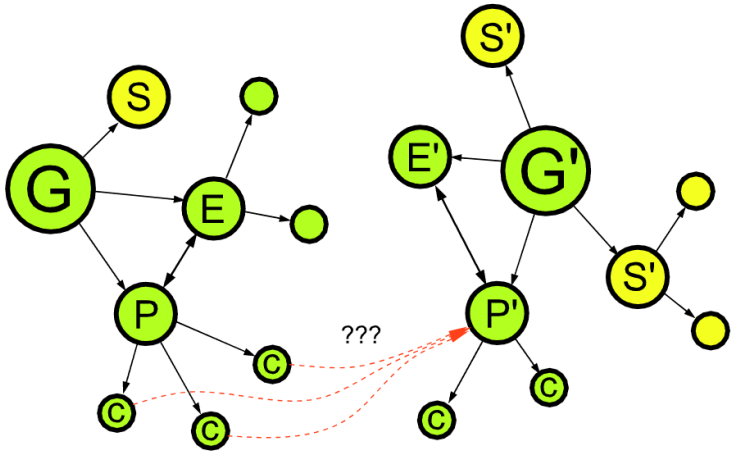


Рис. 10. Изучение частных случаев.

4. **Решение более сложной задачи (генерализация).** Иногда решение нашей задачи является частным случаем какого-то общего правила. Например, такой вид задач очень часто встречается при решении задач по индукции. В поиске более сложной задачи помогает знание основных теорем. Если ты знаешь все основные теоремы в данной области математики, то весьма вероятно, что твоя задача окажется частным случаем хотя бы для одной из них. Схематически данный метод представлен на Рис. 11. Из него видно, что вместо задачи PP' мы можем решить более общую задачу PG' (или эквивалентную ей EG') и получить наше решение как частный случай (путь PG'P' или PEG'P').

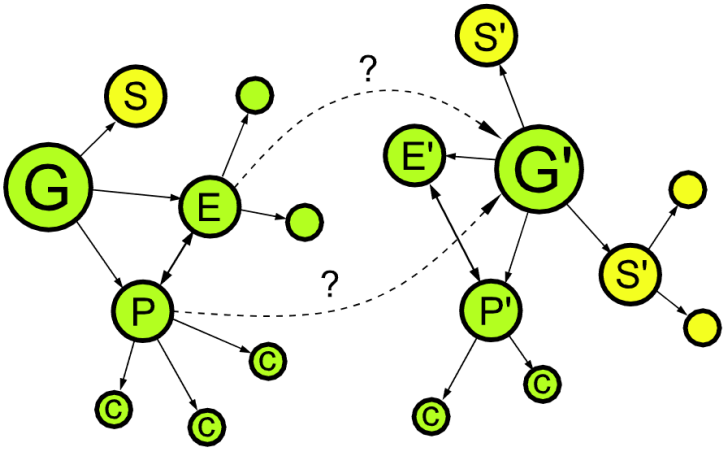


Рис. 11. Генерализация.

5. **Решение упрощенного варианта задачи.** "Простота" задачи понятие относительное, но на практике иногда интуитивно ясно, каким образом нашу задачу можно сделать проще. Можно уменьшить количество элементов, ослабить условия и т. д.

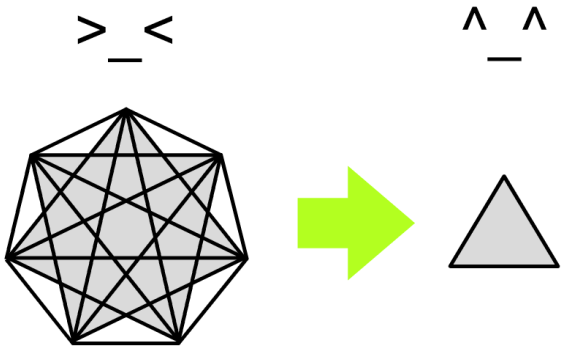


Рис. 12. Математик, помни: при виде сложного всегда начинай с простого!

6. **Поиск и решение похожей или аналогичной математической** задачи (Рис. 13). Так как математические структуры неслучайны, то похожие задачи очень часто имеют похожие способы решения. Для определения сходства между задачами можно придумать несколько разных метрик. Например, у наших задач могут быть похожие исходные данные, похожее целевое значение или в ходе решения мы натолкнулись на что-то знакомое. Например, если мы знаем, что очень похожая на нашу задача имеет решение A1234A', то и наше решение может частично проходить по тому же пути. Поэтому будет полезно поискать решения типа P234P' и ему подобные.

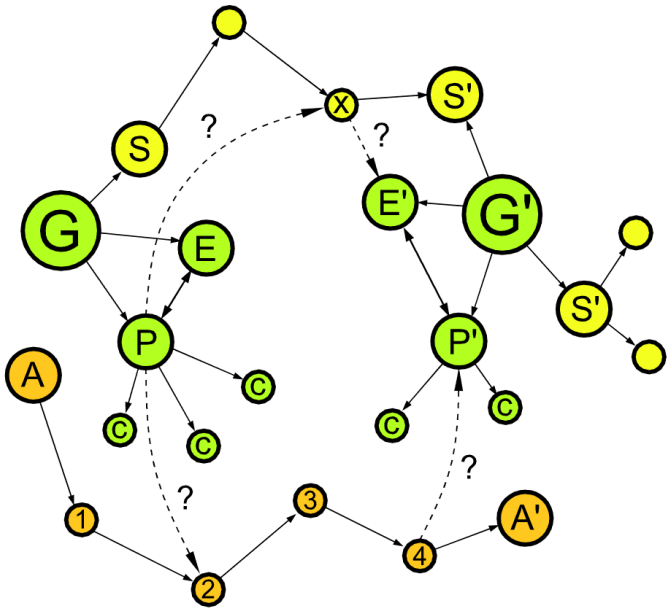


Рис. 13. Решение похожей/аналогичной задачи.

7. **Поиск и решение похожей или аналогичной задачи из другой области знаний** — физическая, химическая, биологическая интуиция**.** Иногда в решении задачи помогает поиск ее сходства с природными процессами. Например, физическая интуиция позволяет нам сравнить задачу с такими явлениями, как расширение, сжатие, течение воды, равновесие, испарение, растяжение, разрыв и так далее.

5 Непрямые техники

Решение задачи - это построение цепочки преобразований, ведущей от исходных данных к целевому значению. Вполне возможно, что в одном из звеньев мы упремся в тупик и не сможем продвинуться дальше. Если задача не решается с помощью прямого преобразования, то можно попробовать применить непрямые техники доказательства.

1. **Доказательство по контрапозиции**[4]. Вместо прямого перехода мы пытаемся доказать обратный переход между отрицаниями исходным утверждений (Рис. 14).

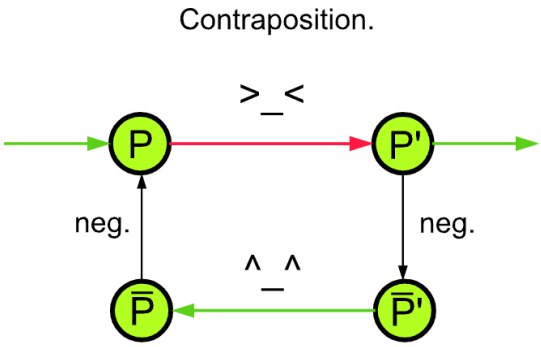


Рис. 14. Доказательство по контрапозиции.

2. **Сведение к противоречию**[5]. Мы предполагаем, что доказываемое утверждение неверно — и пытаемся выяснить, приведет ли это предположение к противоречию. Если противоречие обнаружено, значит исходное предположение неверно, и доказываемое утверждение является истинным.

3. **Доказательство по индукции**[6]. Мы используем особенности структуры некоторых множество (например, множества натуральных чисел). Вместо доказательства бесконечного числа утверждений, мы доказываем базовое утверждение и истинность перехода от утверждения с номером (n) к утверждению с номером (n + 1). Кроме указанного, существует еще несколько вариантов математической индукции.

5. **Техника обратного движения**[7]. В этом случае мы предполагаем, что целевое утверждение истинно (искомое значение найдено или объект построен) и пытаемся понять, понять, каким образом можно пройти от цели к исходным данным. Данная техника очень полезна в тех случаях, когда из исходных данных можно сделать слишком большое количество выводов, а цель настолько специфична, что к ней заведомо не может вести много маршрутов (Рис. 15).

4https://en.wikipedia.org/wiki/Contraposition

5https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_by_contradiction

6https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction

7https://en.wikipedia.org/wiki/Backward_chaining

Существует вариант данной техники («строительство моста»), при котором поиск решения происходит сразу по двум направлениям — от начала к концу и от конца к началу.

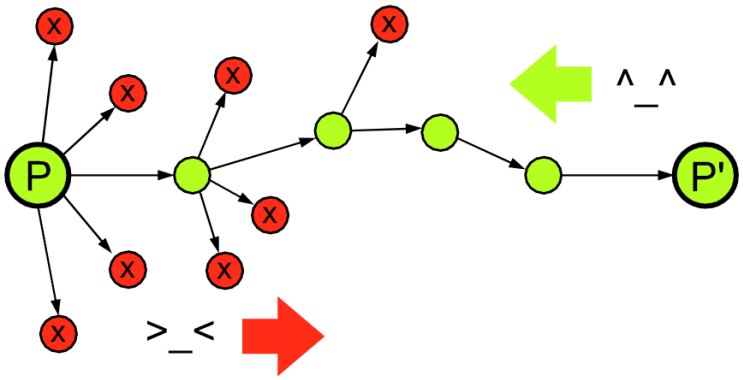


Рис. 15. Техника обратного движения.

6. **Поиск контрпримера.** Если мы сможем установить, что общее правило, которое мы пытаемся доказать, не выполняется для некоторого частного случая, то из этого сразу же следует, что наше общее правило неверно. Поиск контрпримеров — один из самых простых методов опровержения общих утверждений. Так как для опровержения любой, даже самой сложной гипотезы достаточно всего одного контрпримера, данный метод весьма эффективен как средство их тестирования и отсева.

В настоящее время издано множество книг, посвященных техникам доказательства в математике. Одной из самых известных является Chartrand, Polimeni, Zhang, «Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics».

6 Декомпозиция задачи

Сложную задачу можно разбить на более простые подзадачи, после чего решить каждую из них отдельно. Для решения каждой такой подзадачи можно использовать весь спектр эвристик. Существуют два основных способа декомпозиции:

1. **Экстенсивный метод.** (Рис. 16). В математике этот метод также называется «доказательством по случаям». Его можно использовать в тех случаях, когда мы можем разбить задачу на несколько не пересекающихся подзадач и решить каждую подзадачу отдельно. Например, если нам нужно доказать, что некоторое свойство функции выполняется на всей числовой оси, мы можем отдельно разобрать случаи $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ и объединить решения.

2. **Интенсивный метод.** Мы составляем предварительный план решения задачи, разбиваем предполагаемую цепочку решения на отдельные подзадачи, решаем их (если это возможно), а потом пытаемся объединить.

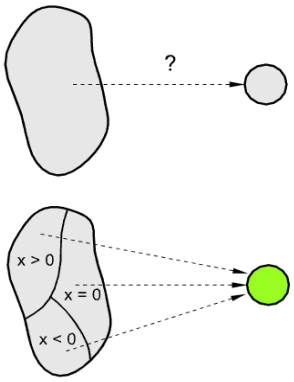


Рис. 16. Доказательство по случаям.

7 Вспомогательные построения

К вспомогательным построениям можно отнести любые математические конструкции, облегчающие решение основной задачи. Общих рекомендаций по таким построениям не существует, так как в каждом домене используется целый ряд характерных только для него вспомогательных конструкций.

Для эффективного построения вспомогательной конструкции мы должны попытаться ответить на следующие вопросы: Что нам известно? Чего мы хотим добиться? Что нам может в этом помочь? Какой элемент, структуру или функцию я могу добавить в задачу, чтобы этого достичь? Наиболее часто встречаются следующие виды вспомогательных построений.

1. **Построение вспомогательной функции** (нормы, метрики, характеристические функции, оценочные функции и т. д.)

2. **Введение координат** (оси, точки отсчета, линии уровня и т. д.)

3. **Геометрические построения** (касательные, перпендикуляры, оси симметрии и т. д.)

8 Методы выхода из тупика

Иногда мы застреваем в решении задачи прочно и надолго — нам больше не помогают ни знания, ни опыт, ни владение эвристиками, ни развитые метакогнитивные навыки, ни генератор творческих идей в нашем бессознательном. Мы понимаем, что зашли в тупик и продолжать работать дальше нет смысла. Чтобы выйти из тупика, нам необходимо попытаться преодолеть инерцию мышления и изменить привычную точку зрения на задачу.

1. **По возможности ясно сформулировать, что именно ты не понимаешь и что у тебя не получается.** Лучше сделать это вслух или письменно.
   - Я не понимаю, что…
   - Я не понимаю, как…
   - Я не понимаю, почему…
2. На время отложить задачу и отдохнуть/помедитировать.
3. Отложить задачу, вернуться к учебному материалу и перечитать его, пытаясь найти связь между изученными концепциями и решаемой задачей.
4. Отложить текущую задачу и заняться другой - лучше всего максимально отличной от прежней.
5. Переключится на монотонную физическую активность — бег, велосипед, лыжи, прыжки со скакалкой. Подобная активность позволяет ввести мозг в «дефолтное состояние» и снизить жесткость ассоциативных связей.
6. Отложить задачу на следующий день и попробовать решить ее сразу при пробуждении, пока мышление рассеяно.
7. Отложить задачу надолго и надеяться, что бессознательное решит ее за тебя (метод Пуанкаре).
8. Отложить задачу и заняться дальнейшим изучением материала. Возможно, где-то там встретится ключ к решению.
9. Попросить у эксперта (преподавателя, сокурсника, коллеги) подсказать какую-нибудь идею насчет решения.
10. Случайный метод - 1. Выбрать несколько случайных методов решения задач из уже изученного материала, после чего попытаться его применить.
11. Случайный метод - 2. Выбрать несколько методов решения задач из неизвестного материала («гадание на Кострикине»), после чего попытаться их применить.
12. Случайный метод - 3. Спросить друга, знакомого, маму, кота, как бы они решили аналогичную задачу. Попытаться применить их метод вне зависимости от его абсурдности. Основная идея метода заключается в том, чтобы любым способом покинуть привычную колею и увидеть задачу в новом свете.
13. Отступление и сдача позиций. Отложить задачу навсегда, а сэкономленное время потратить на что-нибудь другое. **В конце концов, никто никогда не решит всех задач.**

9 Проверка и анализ решения

После того, как интуиция подсказала нам некую весьма правдоподобную идею решения, или даже целый ряд таких идей, мы должны их проверить, убедиться в их правильности и по возможности строго сформулировать.

Эффективный отсев гипотез сам по себе является достаточно трудной задачей. Для ее решения можно воспользоваться следующими весьма простыми эвристиками.

1. Проверка гипотезы на разумность и адекватность. Не является ли гипотеза слишком странной? Не порождает ли она фантастические или несовместимые с условием задачи ответы - например, «полтора землекопа» и тому подобное?
2. Проверка гипотезы типичными случаями. Если гипотеза неверна, то случайно выбранный объект может оказаться подходящим контрпримером для ее опровержения.
3. Проверка гипотезы экстремальными случаями.

Допустим, что гипотеза прошла наш тест. Теперь мы должны сформулировать ее по возможности строго, следуя формуле: «Сначала убеди себя, потом коллегу, затем оппонента». На каждом этапе разработки наша гипотеза рискует оказаться неверной — и пока решение не проверено несколькими критиками, нельзя быть до конца уверенным в его правильности.

После формулировки найденного решения, мы должны его тщательно исследовать и проанализировать. Этот процесс состоит из следующих этапов.

1. Упрощение найденного решения.
2. Вывод следствий из полученного решения.
3. Поиск альтернативного решения или решений.
4. Анализ решения. В ходе анализа мы должны получить ответ на ряд вопросов.
    - Можно ли обратить решение и превратить импликацию в эквивалентность?
    - Похоже ли решение на что-то уже встреченное ранее? Что похоже, на что похоже, почему похоже?
    - Можно ли применить полученный результат где-то еще?
    - Можно ли обобщить результат?
    - В чем состояла ключевая идея решения? Какой метод сработал, а какие нет?
    - Какие ошибки были допущены в ходе решения?

Литература

Математика как когнитивная деятельность.

Keith Devlin, «The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved And Why Numbers Are Like Gossip», 2001.

Núñez, Rafael E., Lakoff, George, «Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being», 2000.

Stanislas Dehaene, «The number sense: how the mind creates mathematics», 2011.

Общий обзор математики.

Jean Alexandre Dieudonné, «A Panorama of Pure Mathematics (as Seen by N. Bourbaki)», 1982.

Leone Burton, «Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics», 2004.

Martin H Krieger, «Doing Mathematics: Convention, Subject, Calculation, Analogy», 2015.

Philip J. Davis, Reuben Hersh, «The Mathematical Experience», 2012.

Reuben Hersh, «What Is Mathematics, Really?», 1997.

Saunders Mac Lane, «Mathematics, Form and Function», 1986.

Steen L.A. (ed.), «Mathematics today. Twelve informal essays», 1978.

Steven G. Krantz, «The Proof is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof», 2011.

«The Princeton Companion to Mathematics».

«The Princeton Companion to Applied Mathematics».

Как решить задачу?

Адамар Ж., «Исследование психологии процесса изобретения в области математики», 2001.

Пойа Дж., «Как решать задачу», 1961.

Пойа Дж., «Математика и правдоподобные рассуждения», 1975.

Пойа Дж., «Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание", 1976.

(ICME-13 Topical Surveys) «Problem Solving in Mathematics Education», 2016.

Alan Schoenfeld, «Mathematical Problem Solving», 1985.

J. Mason, L. Burton, K. Stacey, «Thinking Mathematically», 2010.

Nelsen R., «Proofs without words 1. Exercises in visual thinking», 1993.

Nelsen R., «Proofs without words 2. More exercises in visual thinking», 2000.

Roger Nelsen, «Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics», 2006.

Wayne A. Wickelgren, "How to solve mathematical problems», 1995.

Тренировка эвристик.

Angelo Di Pasquale, Norman Do, Daniel Mathews, «Problem Solving Tactics», 2014.

Arthur Engel, «Problem-solving strategies», 1998.

Loren C. Larson, «Problem-solving through problems», 1983.

Martin J. Erickson, Joe Flowers, «Principles of Mathematical Problem Solving», 1999.

Razvan Gelca, Titu Andreescu, «Putnam and beyond».

Книги из серии «AOPS».

Переход от школьной к университетской математике.

Antonella Cupillari, «The Nuts and Bolts of Proofs», 2013.

Daniel J. Velleman, «How to prove it: a structured approach», 2006.

Daniel Solow, «How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes», 2013.

Gary Chartrand, Albert D. Polimeni, Ping Zhang, «Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics», 2018.

John P. D'Angelo, Douglas B. West, «Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs», 1999.

John Stillwell, «Numbers and Geometry», 1998.

Kevin Houston, «How to Think Like a Mathematician», 2009.

Richard Hammack, «Book of proof», 2009.

Serge Lang, «Basic Mathematics», 1971.

Ted Sundstrom, «Mathematical Reasoning, Writing and Proof», 2014.

Интернет-ресурсы.

Интернет-порталы.	
Американское математическое сообщество.	https://www.ams.org/home/page
Американская математическая ассоциация.	https://www.maa.org/
Mathnet, общероссийский математический портал.	http://www.mathnet.ru/
НОЦ МИАН.	http://www.mi-ras.ru/index.php?c=noc
МЦНМО.	http://www.mccme.ru/
НМУ.	https://www.mccme.ru/ium/
Просветительский проект «Лекториум».	https://www.lektorium.tv/
Лекторий МФТИ.	https://lectoriy.mipt.ru/
Форумы.	
Вопросы и ответы.	https://mathoverflow.net/
Ответы и вопросы.	http://math.stackexchange.com/
r/math	https://www.reddit.com/r/math/
Обсуждение математики.	http://dxdy.ru
Решение задач.	https://artofproblemsolving.com/community
Библиотеки и вики.	
Sci-hub. 70 млн. научных статей.	https://sci-hub.si/ https://vk.com/sci_hub
Arxiv.	https://arxiv.org/
Libgen.	http://libgen.io
Электронная библиотека ИТМО.	http://mathdep.ifmo.ru/library/
Вики ФКН.	http://wiki.cs.hse.ru/
Вики CSC.	https://wiki.compscicenter.ru/index.php/CSC_Wiki
Вики по ML.	http://www.machinelearning.ru/
Библиотека математических доказательств.	https://proofwiki.org/
Вики по машинному обучению. Дорожные карты, темы, учебники, курсы.	https://metacademy.org/
Архив старых научных книг.	http://www.mathesis.ru/books/
Персональный архив Евгения Абрамочкина.	http://www.ega-math.narod.ru/
Темы, рекомендации, списки книг.	
Список списков от мехмата.	https://rmbk.me/math_books/
«Что почитать?» от матфака ВШЭ.	https://math.hse.ru/books

Список Томфорда.	https://www.math.uh.edu/~tomforde/textbooks.html
Список /math.	http://pastebin.com/4iMjfWAf
Список dxdy.	http://pastebin.com/YP1uaUyd
Goodbook.txt. Еще один список dxdy.	http://pastebin.com/4FngRj6n
Список книг с форчана.	http://4chan-science.wikia.com/wiki/Mathematics
Старая программа Вербицкого.	http://imperium.lenin.ru/~verbit/MATH/programma.html
Новая программа Вербицкого.	http://verbit.ru/Job/HSE/Curriculum/all.txt
How to Become a Pure Mathematician (or Statistician).	http://www.geocities.ws/mathphyweb/puremath.pdf
Список литературы НМУ.	https://docs.google.com/spreadsheets/d/1UWwIIAFwSwOQLK3m--LOaMOvHUivFDEz-JAnLa87i7Q/edit#gid=0
Гарвардская программа к экзамену в магистратуру.	http://www.math.harvard.edu/quals/index.html
Полезные материалы.	
Вики Петра Возняка по эффективному обучению.	https://supermemo.guru/wiki/SuperMemo_Guru
Львовский, набор и верстка в «LaTeX».	http://www.mccme.ru/free-books/llang/newllang.pdf
Каталог математических задач.	http://problems.ru/
Проект Эйлер. Задачи на алгоритмы.	https://projecteuler.net
Вольфрам.	https://www.wolframalpha.com/
Geogebra.	https://www.geogebra.org/
Гайд от Шрапнеля. Поступление в зарубежные вузы.	https://gist.github.com/nullst/82b31fb04ff87d037939
Блоги.	
Теренс Тао.	http://a-shen.livejournal.com/
Тимоти Гауэрс.	https://gowers.wordpress.com/
Михаил Вербицкий.	http://lj.rossia.org/users/tiphareth/
Александр Куклев.	http://akuklev.livejournal.com/
Александр Шень.	http://a-shen.livejournal.com/
Видеоканалы и коллекции записей.	
Лекториум.	https://www.youtube.com/channel/UCxAGkrJYNlpC1jfnJvE_6Lw
Матфак ВШЭ.	https://www.youtube.com/channel/UCASlwNxf7mHBUEPr1s6fsDg

НМУ.	https://www.youtube.com/channel/UCpi8qkXE7-q3TY19lIgO_Kw
Коллекция лекций по различным областям науки.	http://videolectures.net/
Лекции классиков. Терстон, Громов, Салливан, Арнольд и другие.	http://www.math.stonybrook.edu/Videos/Einstein/
Наглядная теория групп.	https://www.youtube.com/channel/UCH1cV4RtgI_N97M8jepiUzw/feed
Профессор Норман.	https://youtube.com/user/njwildberger
Harpreet Bedi.	https://www.youtube.com/channel/UCErLELnXehsJ7ycW4OJgfQQ/videos
Сборная солянка.	https://www.youtube.com/channel/UCrOG7bjo_xqRSoX1g9X3fqQ
Архив лекций.	http://swc-alpha.math.arizona.edu/video/
Ann Balmin, решение задач с международной математической олимпиады.	https://www.youtube.com/channel/UCNklgh27b4LGNFCioUcKaEA
Павел Шестопалов.	https://www.youtube.com/channel/UCOSK7BOX_onFvQiyj6Z_WrQ
Иван Пономарев, лекции по теории множеств.	https://www.youtube.com/channel/UCZKK88fxtOgQgOlGq1UKpKw
Артем МакЛектор, школьная математика.	https://www.youtube.com/user/MathLector/videos
MathTheBeautiful, математика для старшеклассников.	https://www.youtube.com/channel/UCr22xikWUK2yUW4YxOKXclQ/videos
Денис Потапов, матанализ и линал.	https://www.youtube.com/channel/UCE28HIozPpoZRcLAUZnJ0zA
Малый мехмат МГУ.	https://www.youtube.com/channel/UC-yk6uhkjCJquDVlLWSfOkw/featured
PBS Infinite Series.	https://youtube.com/channel/UCs4aHmggTfFrpkPcWSaBN9g
Математические дудлы.	https://www.youtube.com/user/Vihart
3Blue1Brown, научно-популярная математика.	https://www.youtube.com/channel/UCYO_jab_esuFRV4b17AJtAw