

Victor Bryant **Aspekty kombinatoryki**

Wydanie drugie

Z angielskiego przełożył
Zbigniew Palka



Wydawnictwa Naukowo-Techniczne • Warszawa

Dane o oryginale
VICTOR BRYANT
Aspects of Combinatorics
A wide-ranging introduction

Published by the Press Syndicate of the University of Cambridge
© Cambridge University Press 1993

Redaktor Zuzanna Grzeszczak
Okładkę i strony tytułowe projektował Zygmunt Ziemka
Przygotowanie do druku Piotr Bolek
Korekta Grażyna Mocarska, Gabriela Szpunar, Lech Wysocki



© Copyright for the Polish edition by Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
Warszawa 1997, 2007

All Rights Reserved
Printed in Poland

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym również nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
00-048 Warszawa, ul. Mazowiecka 2/4
tel. 0-22 826 72 71, e-mail: wnt@wnt.pl
www.wnt.pl

ISBN 978-83-204-3393-7

Spis treści

Wstęp —	7
1 Współczynniki dwumianowe —	9
2 Ile jest drzew? —	22
3 Twierdzenie o małżeństwach —	35
4 Trzy podstawowe zasady —	47
5 Kwadraty łacińskie —	62
6 Pierwsze twierdzenie teorii grafów —	84
7 Kolorowanie krawędzi —	95
8 Haremy i turnieje —	106
9 Twierdzenia minimaksowe —	113
10 Rekurencja —	125
11 Kolorowanie wierzchołków —	143
12 Wielomiany szachowe —	155
13 Grafy planarne —	169
14 Kolorowanie map —	184
15 Konfiguracje i kody —	199
16 Teoria Ramseya —	223
Wskazówki do zadań —	248
Odpowiedzi do zadań —	273
Literatura —	285
Skorowidz —	286

Wstęp

Według encyklopedycznej definicji „kombinatoryka to dział matematyki elementarnej zajmujący się badaniem różnych możliwych zestawień i ugrupowań, jakie można tworzyć z dowolnego zbioru skończonego”. Znajduje zastosowanie w teorii zbiorów, teorii grafów, rachunku macierzowym, ale też w rozwiązywaniu problemów transportowych i badaniu populacji. Można ją rozpatrywać z różnych punktów widzenia, o czym będzie mowa w tej książce.

W latach siedemdziesiątych, kiedy po raz pierwszy oferowano wykłady dotyczące kombinatoryki, była ona traktowana jako łatwy przedmiot, chętnie wybierany przez studentów młodszych lat. Jednakże popularność wykładów z kombinatoryki wynika przede wszystkim stąd, że rozważane w niej zagadnienia są jasno sformułowane i zrozumiałe, choć w wielu przypadkach odpowiedzi na stawiane pytania nie należą do łatwych. Ponadto dzięki różnorodności omawianych tematów, nawet gdy jeden dział jest dla studenta niezrozumiały, z następnym może już nie mieć kłopotów.

Istnieje oczywiście niebezpieczeństwo, że taki konglomerat będzie jedynie zestawem zagadnień z wiedzy ogólnej. Jednakże, przygotowując materiał do takiego wykładu, zaczyna się rozumieć, jak wiele zagadnień jest ze sobą powiązanych. Niektóre z tych wzajemnych zależności stają się jasne dopiero po wieloletnim zajmowaniu się tą dziedziną. Ma się wielką satysfakcję, kiedy student po raz pierwszy skojarzy, że przykład dotyczący „poczekalni u lekarza” z rozdziału 1 może być użyty do rozwiązania problemu „pani domu” z rozdziału 12, lub odkryje, że twierdzenie dotyczące turniejów może zostać udowodnione w bardziej elegancki sposób dzięki wykorzystaniu prostego zastosowania twierdzenia o małżeństwach.

Mój wybór aspektów kombinatoryki ma, oczywiście, bardzo osobisty charakter. Składa się nań dużo materiału z teorii grafów oraz teorii transwersal. Pisząc tę książkę, przyjąłem zasadę, że nie skupiam się na danym temacie w jednym tylko miejscu, lecz nawiązuję do niego wielokrotnie w różnych częściach tekstu. Wydaje mi się, że jest to najbardziej atrakcyjny sposób prezentacji materiału, a przerwa w wykładzie, zanim pozna się kolejne zastosowanie pewnego twierdzenia, daje sposobność głębszego zrozumienia go. Chociaż nie jest konieczne szczególne przygotowanie merytoryczne, przyswojenie większości z omawianych zagadnień wymaga pewnej matematycznej dojrzałości i praktyki akademickiej. Zamieszczony w książce materiał jest wystarczający do pełnego rocznego wykładu. Prowadzący zajęcia może jednak przenieść niektóre zagadnienia na kurs

dla bardziej zaawansowanych lub po prostu opuścić pewne trudniejsze kwestie i dowody.

Na moje serdeczne podziękowania w pełni zasługują Hazel Perfect oraz, nieżyjący już dziś, Leon Mirsky. Oni to bowiem napisali pionierskie prace, dotyczące teorii transversal, oraz bardzo łagodnie wprowadzali mnie w tę tematykę, gdy rozpoczynałem pracę jako wykładowca. Serdeczne podziękowania należą się wszystkim autorom, których prace miały pewien wpływ na dobór przeze mnie tematyki i sposób jej prezentacji. Słowa uznania kieruję również do Petera Brooksbanka, absolwenta Uniwersytetu w Sheffield, zajmującego się teraz pracą naukową, za przeczytanie rękopisu i wiele cennych uwag. Ale przede wszystkim z całego serca dziękuję wielu moim studentom Uniwersytetu w Sheffield, którzy przez te wszystkie lata uczęszczali na moje wykłady z kombinatoryki i dzielali mój entuzjazm do tej dziedziny. Uczenie ich było dla mnie wielką przyjemnością i prawdziwym zaszczytem.

VICTOR BRYANT

1992

1

Współczynniki dwumianowe

W każdym wykładzie z kombinatoryki wielokrotnie występuje pojęcie wybierania pewnej liczby obiektów. Pierwszy rozdział mówi więc o wyborach i liczbie sposobów dokonania takich wyborów. Nie zawiera żadnych twierdzeń, a po prostu wachlarz różnorodnych pojęć opisanych na przykładach. I chociaż pojęcia te są elementarne, a wiele z nich jest znanych, większość czytelników zapewne odnajdzie wśród nich jakieś nowe aspekty.

Dla danych n obiektów niech $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę wyborów k obiektów spośród n : kolejność, w jakiej są wybierane te obiekty, jest bez znaczenia.

Przykład: W książce tej jest 16 rozdziałów: ile jest różnych wyborów dwóch rozdziałów spośród nich? Ogólnie, na ile sposobów można wybrać dwa obiekty spośród n ?

Rozwiązanie:

$$\binom{16}{2} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$$

Jest kilka sposobów, aby się o tym przekonać. Na przykład można wypisać wszystkie pary rozdziałów, mając 16 możliwości dla pierwszego elementu pary i 15 pozostałych możliwości dla drugiego elementu pary:

1, 2	
1, 3	
1, 4	Na tej liście jest oczywiście 16×15 par, ale
$\vdots$	zauważmy, że każde dwa rozdziały pojawiają się
1, 16	na niej jako dwie różne pary. Na przykład 7 i 11
2, 1	pojawia się raz jako „7, 11”, a potem ponownie
2, 3	jako „11, 7”. Ponieważ dla nas nie ma znaczenia
2, 4	uporządkowanie, wystarczy, że policzymy tylko
$\vdots$	połowę par z tej listy, a otrzymamy, że $\binom{16}{2}$ jest
16, 14	równe 120, jak powyżej.
16, 15	

Innym sposobem weryfikacji, że $\binom{16}{2} = 120$, jest ponowne wypisanie par, przy czym, chcąc uniknąć powtórzeń, zapisujemy jedynie te, w których pierwszy element jest mniejszy od drugiego (jak „7, 11”):

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 1, 2 \\ 1, 3 \\ \vdots \\ 1, 16 \end{array} \right\} 15 \\ \left. \begin{array}{l} 2, 3 \\ \vdots \\ 2, 16 \end{array} \right\} 14 \\ \left. \begin{array}{l} 3, 4 \\ \vdots \\ 3, 16 \end{array} \right\} 13 \\ \vdots \\ \left. \begin{array}{l} 14, 15 \\ 14, 16 \end{array} \right\} 2 \\ 15, 16 \} 1 \end{array}$$

Na tej liście każda z możliwych par występuje dokładnie raz, a więc musimy po prostu zliczyć pary, otrzymując $\binom{16}{2} = 15 + 14 + 13 + \dots + 2 + 1 = \frac{1}{2} \times 15 \times 16$ tak jak poprzednio.

Oczywiście, oba rozumowania rozciągają się na wybór dwóch spośród n , dając

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1) \quad \square$$

Przykład: Na ile sposobów można wybrać trzy spośród 16 rozdziałów? Wykazać, że w ogólności

$$\binom{n}{3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

Rozwiązanie: Postępując tak jak w pierwszym podejściu poprzedniego rozwiązania, otrzymujemy listę złożoną z $16 \times 15 \times 14$ trójek rozdziałów; 16 możliwości dla pierwszego elementu trójki, 15 pozostałych możliwości dla drugiego elementu i 14 pozostałych możliwości dla trzeciego. Jednakże każdy poszczególny zbiór trzech rozdziałów będzie występował na tej długiej liście sześć razy (na przykład zbiór złożony z trzech rozdziałów 7, 11 i 15 pojawi się na niej jako „7,11,15”, „7,15,11”, „11,7,15”, „11,15,7”, „15,7,11” i „15,11,7”). Stąd liczba różnych wyborów trzech rozdziałów spośród 16 wynosi

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{6} = 560$$

Drugie podejście w poprzednim rozwiązaniu polegało na wypisaniu żądanych wyborów tak, że pierwszy element był mniejszy od drugiego. Uniknęliśmy w ten sposób powtórzeń par. Podobnie moglibyśmy teraz wypisać trójki, z których każda byłaby w rosnącym porządku: aby określić liczbę takich trójek, możemy skorzystać z rezultatu poprzedniego przykładu:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 4 \\ \vdots \\ 1, 15, 16 \end{array} \right\} \binom{15}{2} \text{ trójek zaczynających się od 1} \\ \left. \begin{array}{l} 2, 3, 4 \\ \vdots \\ 2, 15, 16 \end{array} \right\} \binom{14}{2} \text{ trójek zaczynających się od 2} \\ \left. \begin{array}{l} 3, 4, 5 \\ \vdots \\ 3, 15, 16 \end{array} \right\} \binom{13}{2} \text{ trójek zaczynających się od 3} \\ \vdots \\ \left. \begin{array}{l} 13, 14, 15 \\ 13, 14, 16 \\ 13, 15, 16 \end{array} \right\} \binom{3}{2} \text{ trójek zaczynających się od 13} \\ 14, 15, 16 \} \binom{2}{2} \text{ trójek zaczynających się od 14} \end{array}$$

W konsekwencji

$$\binom{16}{3} = \binom{15}{2} + \binom{14}{2} + \binom{13}{2} + \dots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 560$$

Pozostawiamy czytelnikowi do wykazania, że podobne rozumowanie wyboru trzech obiektów spośród n dałoby zależność

$$\binom{n}{3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \quad \square$$

Ten subtelny wstęp naprowadza na myśl, że w przypadku wyboru k obiektów spośród n , gdzie jest istotna kolejność wybierania, liczba wyborów wynosi

$$\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots}_{k \text{ liczb}}$$

Jeżeli jednak kolejność, w której są wybierane obiekty, nie ma znaczenia, to każdy zbiór złożony z k obiektów będzie występował w tej globalnej ilości

$$k \times (k-1) \times (k-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

razy. Iloczyn ten jest zapisywany krótko $k!$ (i jest nazywany k silnia). Tak więc liczba różnych wyborów k obiektów spośród n jest dana wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Założyliśmy oczywiście, że n oraz k są dodatnimi liczbami całkowitymi, takimi że $k \leq n$. Przyjmując konwencję, iż $0! = 1$, powyższy wzór ma w dalszym ciągu sens w przypadku, gdy albo k , albo n jest równe zero. Jeżeli zaś $k > n$ lub $k < 0$, to przyjmujemy, że $\binom{n}{k}$ jest 0.

Przykład: Niech k oraz n będą liczbami całkowitymi takimi, że $1 \leq k \leq n$. Stosując argument wyboru pokazać, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$$

Rozwiązanie: Lewa strona wyrażenia jest po prostu ilością wyborów k liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Ile spośród tych układów ma 1 jako najmniejszy element? Ile ma 2 jako najmniejszy element? Rozwiązanie, które uogólnia koncepcję wykorzystaną w poprzednich przykładach, pozostawiamy teraz czytelnikowi. $\square$

Przykład: Ile razy otrzymamy x^k w rozwinięciu wyrażenia $(1+x)^n$?

Rozwiązanie:

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)\dots(1+x)}_{n \text{ razy}}$$

Moglibyśmy udowodnić ten rezultat metodą indukcji względem n , ale zamiast tego zastosujemy argument wyboru. Wymnożenie czynników w wyrażeniu $(1+x)^n$ polega na dodaniu wszystkich składników, otrzymanych przez pomnożenie jednego elementu z pierwszego nawiasu (mianowicie albo 1, albo x) przez jeden element z drugiego, przez jeden z trzeciego itd. Aby otrzymać x^k , należy więc wybrać x z dokładnie k spośród n nawiasów. Stąd globalna liczba x^k w rozważanym rozwinięciu jest równa liczbie wyborów k nawiasów spośród n , mianowicie $\binom{n}{k}$. $\square$

Z przykładu tego wynika, że

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

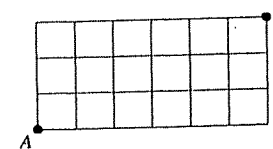
Jest to dobrze znane **rozwinięcie dwumianowe**, dlatego liczby $\binom{n}{k}$ są nazywane często **współczynnikami dwumianowymi**.

Przykład: Pokazać, że

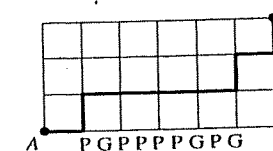
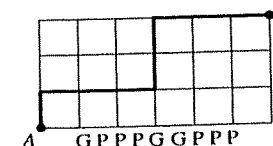
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Rozwiązanie: Najprostszy sposób otrzymania tego wyniku to podstawienie w rozwinięciu dwumianowym za x jedynki. Alternatywną metodą, wykorzystującą argument wyboru, jest zliczenie wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego. Mamy $\binom{n}{0}$ podzbiorów nie zawierających żadnego elementu (tj., po prostu, zbiór pusty), $\binom{n}{1}$ podzbiorów jednoelementowych, $\binom{n}{2}$ podzbiorów dwuelementowych, itd. Lewa strona wyrażenia reprezentuje więc liczbę wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego. Czy istnieje szybsza metoda zliczenia tych podzbiorów? Aby utworzyć podzbiór należy, po prostu, dla każdego spośród n obiektów zdecydować, czy należy on do podzbioru, czy nie. Jest to dwuwartościowy wybór i jest on dokonywany niezależnie dla każdego z n obiektów. Konsekwentnie liczba sposobów wybrania jakiegoś podzbioru wynosi 2^n , co implikuje powyższy rezultat. $\square$

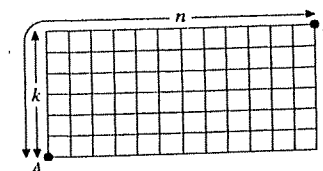
Przykład: Wyobraźmy sobie, że ten rysunek przedstawia prostokątną kratę ulic. Chcemy przejść ulicami od A do B , idąc najkrótszą z możliwych dróg. Ile jest takich dróg? Uogólnić otrzymany wynik na kratę o dowolnych wymiarach.



Rozwiązanie: Dwie typowe drogi od A do B przedstawiono na rysunkach. Każda najkrótsza droga od A do B musi składać się z dziewięciu odcinków w kierunku B , innymi słowy: każda droga musi zawierać dziewięć odcinków, z których dowolne trzy muszą być „do góry” (G), a pozostałe muszą być „w prawo” (P). Dla przykładu pokazane dwie drogi mogą być opisane za pomocą ciągów złożonych z „do góry” i „w prawo”, tak jak zostało to przedstawione. Stąd liczba możliwych do przyjęcia dróg od A do B jest równa liczbie sposobów wskazania, które trzy spośród dziewięciu odcinków muszą być „do góry”. Mamy $\binom{9}{3} = 84$ takich wyborów.



Podobne rozumowanie pokazuje, że liczba najkrótszych dróg od A do B w kracie przedstawionej po prawej stronie (koniecznie trzeba przejść n odcinków, z których dowolne k musi być „do góry”) wynosi $\binom{n}{k}$. $\square$

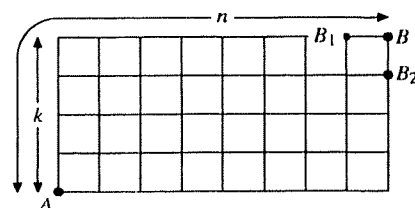


Przykład: Niech k oraz n będą liczbami całkowitymi takimi, że $1 \leq k \leq n$. Pokazać, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Rozwiązanie: Zależność tę można udowodnić na wiele sposobów. Najbardziej nudne byłoby rozpisanie każdej strony za pomocą silni i pokazanie, że otrzymujemy te same rezultaty. Inny sposób polegałby na zbadaniu, ile razy uzyskamy składnik x^k w $(1+x)^n$ i $(1+x)(1+x)^{n-1}$ (które są tym samym wyrażeniem). Jednak rozwiązanie, które zaprezentujemy, wykorzystuje omawiane powyżej drogi w kracie.

W przedstawionej obok kracie mamy $\binom{n}{k}$ najkrótszych dróg od A do B . Drogi te są dwójakiego rodzaju: te, w których ostatni odcinek jest „w prawo” (tj. te, które dochodzą do B z B_1), oraz te, w których ostatni odcinek jest „do góry” (tj. te, które dochodzą do B z B_2). W ten sposób



$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \text{liczba dróg od } A \text{ do } B \\ &= (\text{liczba dróg od } A \text{ do } B_1) + (\text{liczba dróg od } A \text{ do } B_2) \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

co należało pokazać. $\square$

Zależność przedstawiona w tym przykładzie jest bazą tworzenia *trójkąta Pascala* dla współczynników dwumianowych, w którym każdy kolejny współczynnik jest sumą dwóch stojących tuż nad nim:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Przykład: Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą? Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą?

Rozwiązanie: I tym razem odpowiedź można znaleźć kilkoma sposobami (jeden z nich zobaczymy w zadaniach). Tak jak poprzednio wybieramy rozwiązanie wykorzystujące drogi w kracie. Z przyczyn, które wkrótce staną się jasne, bierzemy kratę z czterema ulicami poziomymi i sześcioma odcinkami „w prawo”.

Dwie najkrótsze drogi od A do B są przedstawione na rysunkach. Jeżeli teraz potraktujemy liczbę przebytych odcinków w rzędzie i jako x_i , to drogi te dają się „przetłumaczyć” na podane rozwiązania równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$.

Istnieje więc wzajemnie jednoznaczna zależność między drogami a rozwiązaniami i stąd wynika, że liczba rozwiązań wynosi $\binom{9}{3} = 84$. Podobne rozumowanie pokazuje, że liczba rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

jest równa liczbie najkrótszych dróg od jednego narożnika do drugiego w kracie złożonej z k ulic poziomych i n odcinków „w prawo”. Na takiej drodze trzeba przejść $n+k-1$ odcinków, z których dowolne $k-1$ musi być „w górę”. Stąd więc liczba rozwiązań wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$. $\square$

Do tej pory rozważaliśmy współczynniki *dwumianowe*. Przedrostek „dwi” wskazuje, że mamy do czynienia z dwuwartościowym wyborem, tj. zaliczyć lub nie zaliczyć danego elementu. Możemy w prosty sposób rozszerzyć ten pomysł na współczynniki *wielomianowe*.

Przykład: Ile różnych dziesięciocyfrowych liczb można utworzyć, zapisując w dowolnej kolejności dziesięć cyfr 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2 i 1?

Rozwiązanie: Odpowiedź brzmi

$$\frac{10!}{4! \times 3! \times 2!} = 12600$$

Aby się o tym przekonać, możemy wzorować się na rozwiązaniu pierwszego przykładu, dotyczącego współczynników dwumianowych. Wyobraźmy sobie długą listę, złożoną z 10! liczb utworzonych z danych dziesięciu cyfr, zapisanych w dowolnej kolejności: na tej liście będzie mnóstwo takich samych liczb. Na przykład liczba

$$4231442343$$

wystąpi na niej $4! \times 3! \times 2!$ razy, gdyż przestawianie między sobą czwórek w obrębie ich czterech miejsc, trójek w obrębie ich miejsc i dwójek w ich obrębie, nie zmieni samej liczby. Podobnie każda z innych możliwych liczb będzie występowała na tej liście $4! \times 3! \times 2!$ razy, co daje powyższy rezultat.

Zauważmy alternatywnie, że zagadnienie to jest równoważne wyborowi czterech miejsc z dziesięciu możliwych dla czwórek, następnie trzech miejsc z pozostałych sześciu dla trójek oraz dwóch miejsc z pozostałych trzech dla dwójek: ostatnie wolne miejsce jest dla jedynki. Liczba sposobów wykonania tego wyboru wynosi

$$\binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 12\,600$$

tak jak poprzednio. $\square$

Ta odpowiedź,

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = \binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1}$$

może być także interpretowana jako liczba sposobów rozmieszczenia dziesięciu obiektów w czterech pudełkach, z których pierwsze zawiera cztery obiekty, drugie trzy, trzecie dwa, a czwarte jeden obiekt. Ogólnie, jeżeli $r \geq 2$ oraz $k_1, k_2, \dots, k_r$ są liczbami całkowitymi takimi, że $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, to liczba sposobów rozmieszczenia n obiektów w r pudełkach z k_1 obiektami w pierwszym pudełku, k_2 w drugim, ... oraz k_r w r -tym, jest nazywana *współczynnikiem wielomianowym* i jest oznaczana symbolicznie

$$\binom{n}{k_1 \ k_2 \ \dots \ k_r}$$

Jeżeli którakolwiek z liczb k_i jest ujemna, to współczynnik ten jest zerem. Jeżeli zaś wszystkie k_i są nieujemne, to który bądź z argumentów użyty w ostatnim rozwiązaniu doprowadzi do

$$\binom{n}{k_1 \ k_2 \ \dots \ k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

Współczynniki wielomianowe stosujemy tylko wówczas, gdy $r \geq 2$ oraz r liczb stojących w dolnym rzędzie sumuje się do liczby z górnego rzędu. Zauważmy, że w szczególności, gdy $r = 2$, współczynniki wielomianowe redukują się do zwykłego współczynnika dwumianowego, gdyż

$$\binom{n}{k_1 \ k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2!} = \frac{n!}{k_1! (n - k_1)!} = \binom{n}{k_1}$$

Również pewne własności współczynników dwumianowych przenoszą się łatwo na współczynniki wielomianowe.

Przykład: Pokazać, że

$$\binom{n}{k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_r} = \binom{n-1}{k_1-1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_r} + \binom{n-1}{k_1 \ k_2-1 \ k_3 \ \dots \ k_r} + \dots + \binom{n-1}{k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_r-1}$$

Rozwiązanie: Musimy rozmieścić n obiektów w r pudełkach, przy czym k_1 obiektów ma być w pierwszym pudełku, k_2 w drugim, ... i k_r w r -tym. Jeżeli pierwszy obiekt jest umieszczony w pudełku i , to pozostałe $n-1$ obiekty muszą być rozmieszczone w r pudełkach, z k_1 obiektami w pierwszym pudełku, k_2 w drugim, ..., k_i-1 w i -tym oraz k_r w r -tym. Ponieważ i może przyjąć każdą z wartości od 1 do r , zatem żądana zależność wynika już w sposób oczywisty. $\square$

Przykład: Rozwinięcie dwumianowe może być zapisane w postaci

$$(a+b)^n = \binom{n}{n \ 0} a^n + \binom{n}{n-1 \ 1} a^{n-1} b + \binom{n}{n-2 \ 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{0 \ n} b^n = \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = n}} \binom{n}{k_1 \ k_2} a^{k_1} b^{k_2}$$

Pokazać, że w ogólności

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1 \ \dots \ k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$$

Rozwiązanie: Ponownie możemy wzorować się na metodzie użytej dla rozwinięcia dwumianowego:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_r)(a_1 + a_2 + \dots + a_r) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_r)}_{n \text{ razy}}$$

Po wymnożeniu tych nawiasów współczynnik przy $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$ będzie równy liczbie sposobów wyselekcjonowania a_1 z k_1 nawiasów (wybranych spośród wszystkich), wyselekcjonowania a_2 z k_2 nawiasów (wybranych spośród pozostałych) itd., aż do otrzymania żadanego wyniku. $\square$

Zakończymy ten wstępny rozdział dużym wyborem zadań: do tych, które oznaczono przez [W], można znaleźć pomocną (?) wskazówkę w części zaczynającej się od strony 248, a do tych, które wymagają odpowiedzi liczbowej (oznaczone są

one przez [O]), konkretne wyniki są zamieszczone w części zaczynającej się od strony 273.

ZADANIA

1. Stosując różne metody, pokazać, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad [W]$$

2. W kolejce do kina stoi n osób (przy czym, przynajmniej w Anglii, kolejność osób w kolejce nigdy się nie zmienia). Osoby te są wpuszczane do kina w k grupach, z których każda składa się z jednej lub więcej osób. Na ile sposobów można utworzyć tych k grup? [W,O]

3. Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

gdzie każde x_i jest dodatnią liczbą całkowitą? [W,O]

4. (i) Zastosować odpowiedź do zadania 3 w celu przedstawienia innego uzasadnienia znanego nam już faktu, że liczba rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą, wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$. [W]

(ii) Biorąc pod uwagę liczbę tych x_i , które są zerami w (i), oraz stosując odpowiedź do zadania 3 dla dodatnich x_i , pokazać, że

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{k}{0} \binom{n-1}{k-1} + \binom{k}{1} \binom{n-1}{k-2} + \binom{k}{2} \binom{n-1}{k-3} + \dots + \binom{k}{k-1} \binom{n-1}{0}$$

5. W poczekalni do lekarza, w rzędzie złożonym z n krzeseł, siedzi k pacjentów, w kolejności od lewej do prawej, w ten sposób, że żaden z nich nie znajduje się na sąsiednich krzesełach. Na ile różnych sposobów mógłby być wybrany odpowiedni zbiór k krzeseł? [W,O]

6. Rozważając kolorowanie k spośród n obiektów, mając do dyspozycji dwa kolory, pokazać, że

$$\binom{n}{0} \binom{n}{k} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} + \dots + \binom{n}{k} \binom{n-k}{0} = 2^k \binom{n}{k}$$

7. Stosując każdą z podanych metod, pokazać, że

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

(i) Zastosować rozwinięcie wyrażenia $(1+x)^{2n}$. [W]

(ii) Rozważyć wybór n osób ze zbioru $2n$ osób, który składa się z n mężczyzn i n kobiet. [W]

(iii) Zliczyć najkrótsze drogi w odpowiedniej kracie. [W]

8. (i) Z grupy $2n$ osobowej, złożonej z n mężczyzn i n kobiet, chcemy wybrać podzbiór przy jednym tylko zastrzeżeniu, że liczba wybranych mężczyzn jest równa liczbie wybranych kobiet. Stosując wynik zadania 7, pokazać, że taki podzbiór może być wybrany na $\binom{2n}{n}$ sposoby.

(ii) Tym razem chcemy wybrać podzbiór tak jak w (i), a następnie wskazać przywódcę spośród mężczyzn i przywódczynię spośród kobiet tego podzbioru. Obliczyć liczbę sposobów wybrania najpierw konkretnego podzbioru, a następnie odpowiednich przywódców, a także obliczyć liczbę sposobów wybrania najpierw przywódców, a następnie pozostałych należących do podzbioru. Wywnioskować, że

$$1^2 \binom{n}{1}^2 + 2^2 \binom{n}{2}^2 + 3^2 \binom{n}{3}^2 + \dots + n^2 \binom{n}{n}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$$

(iii) Stosując różne metody, pokazać, że

$$\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1} \quad [W]$$

9. (i) Jeżeli narysujemy na płaszczyźnie n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe oraz żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, to ile będzie wszystkich punktów przecięcia? [O]

(ii) Jeżeli narysujemy na płaszczyźnie n prostych, z których x_1 jest równoległych w jednym kierunku, x_2 równoległych w innym kierunku ... i x_k równoległych w jeszcze innym kierunku oraz żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie, to pokazać, że liczba punktów przecięcia wynosi

$$\frac{1}{2}(n^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)) \quad [W]$$

(iii) Narysować zbiór 17 prostych przecinających się w 101 punktach, przy czym żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie. [W,O]

10. (i) Ile różnych prostokątów można wyznaczyć w przedstawionej na następnej stronie kracie wymiaru $n \times n$? (Jeden z takich prostokątów jest zakresko-

wany: oczywiście prostokąty muszą mieć długość i szerokość co najmniej jednego odcinka, dopuszczalne są także kwadraty). [W,O]

(ii) Korzystając z odpowiedzi do (i), pokazać, że liczba prostokątów leżących w lewym, górnym narożniku wymiaru $r \times r$ rozważanej kraty, które dotykają co najmniej jeden z dwóch wewnętrznych brzegów narożnika (jak pokazany dolny prostokąt), wynosi r^3 . [W]

(iii) Pokazać, że w rozważanej kratce jest

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

prostokątów, a następnie wywnioskować, że

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$

(iv) Ile spośród $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ prostokątów jest kwadratami? [O]

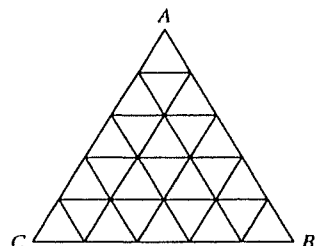
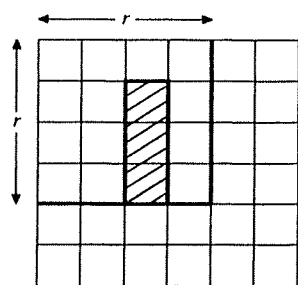
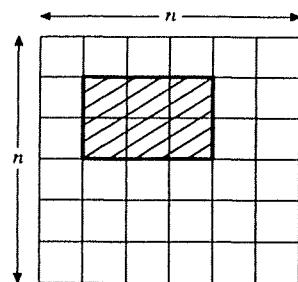
11. (i) Pokazać, że suma liczb stojących w r -tym rzędzie „trójkąta”, przedstawionego poniżej, wynosi $\binom{r+1}{2}$ i, korzystając z tego, wyrazić sumę wszystkich liczb zawartych w „trójkącie” w postaci jednego współczynnika dwumianowego. [O]

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & \\ & & 1 & & 2 & & 3 \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & & & & \vdots & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots & n \end{array}$$

(ii) Sumując na różne sposoby liczby stojące w „trójkącie” wywnioskować, że

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + n \cdot 1 = \binom{n+2}{3}$$

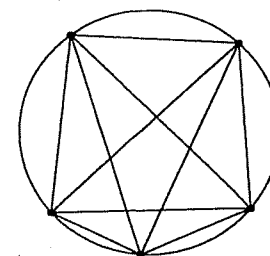
(iii) Ile trójkątów zorientowanych do góry, w ten sam sposób jak trójkąt ABC , można wyznaczyć w kratce takiej, jak pokazano, ale składającej się z n rzędów? [W,O]



(iv) Przedstawić w postaci sumy współczynników dwumianowych liczbę trójkątów zorientowanych odwrotnie niż w (iii). [W,O]

12. Jeżeli na obwodzie koła jest rozmieszczonych n punktów i każda para punktów jest połączona linią prostą, to koło dzieli się na pewną liczbę obszarów. Pokazać, że jeżeli żadne trzy proste nie przeczną się wewnątrz koła, to liczba obszarów będzie równa

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \quad [W]$$



13. W kolejce po lody w cenie 50 pensów ustawiło się $m+n$ osób. Sprzedawca nie ma pieniędzy. Dokładnie m spośród czekających ma tylko monetę pięćdziesięciopensową, a każda z pozostałych n osób tylko banknot jednofuntowy. Rozważając drogi w kratce, znaleźć prawdopodobieństwo, że w każdym momencie sprzedawca będzie miał odpowiednią ilość drobnych pieniędzy, aby obsłużyć kolejnego klienta. [W,O]

Ile jest drzew?

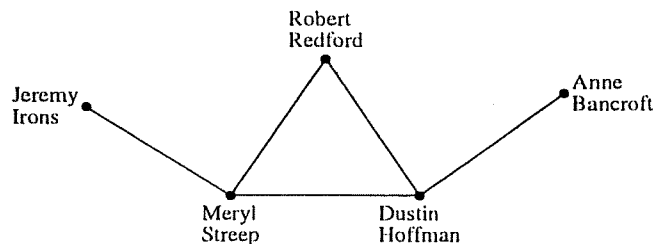
Teoria grafów będzie drugim ważnym tematem tej książki. W tym wprowadzającym rozdziale zbadamy jednak szczegółowo tylko jeden specjalny typ grafu. Zliczając zaś grafy tego typu, zastosujemy niektóre z metod opisanych w pierwszym rozdziale.

Graf $G = (V, E)$ składa się ze skończonego, niepustego zbioru wierzchołków V i zbioru krawędzi E , który jest dowolnym podzbiorem par $\{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$. Krawędź $\{v, w\}$ jest zwykle zapisywana symbolicznie vw (lub wv). Mówimy wówczas, że łączy ona wierzchołek v z wierzchołkiem w , a v oraz w nazywamy końcami (lub wierzchołkami końcowymi) krawędzi vw .

Przykład: Niech $G = (V, E)$ będzie grafem na zbiorze wierzchołków $V = \{\text{Meryl Streep, Dustin Hoffman, Jeremy Irons, Anne Bancroft, Robert Redford}\}$ i niech „zbiór krawędzi” będzie zdefiniowany następująco:

$$E = \{vw : v, w \in V \text{ zagraли razem w filmie przed rokiem 1992}\}$$

W grafie tym na przykład Meryl Streep jest połączona z Jeremy Irons, gdyż oboje grali w filmie Kochanica Francuza. Możemy zilustrować G , przedstawiając wierzchołki jako punkty na płaszczyźnie i łącząc dwa wierzchołki linią prostą (lub krzywą), jeżeli w grafie są one połączone krawędzią:



□

Zauważmy, że w grafie jakkolwiek para różnych wierzchołków może, ale nie musi, być połączona krawędzią; nie dopuszczamy jednak sytuacji, w której wierzchołek jest połączony z samym sobą, jak również takiej, w której dwa wierzchołki

Ile jest drzew?

są połączone kilkoma krawędziami. Niektórzy autorzy nazywają takie grafy „grafami prostymi”: te proste struktury są wystarczające dla wielu zastosowań.

Zanim będziemy mogli przejść do studiowania różnych aspektów teorii grafów, potrzebujemy pewnych fachowych określeń. W grafie *szlak* jest to ciąg wierzchołków

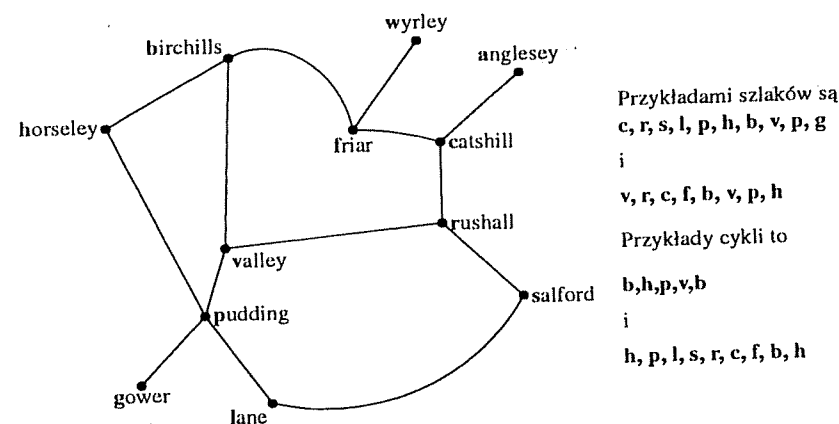
$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$$

(w którym są dozwolone powtórzenia) taki, że wszystkie $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ są różnymi krawędziami grafu. Jeżeli dodatkowo założymy, że wierzchołki w szlaku nie mogą się powtarzać, to mamy do czynienia ze *ścieżką*. Szlak postaci

$$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1$$

gdzie $v_1, v_2, \dots, v_n$ jest ścieżką, jest nazywany *cyklem* (lub *obwodem*). Tak więc, na rysunkach przedstawiających grafy, „szlaki przenoszą” nas wzdłuż krawędzi od jednego wierzchołka do innego: można przy tym przeciąć trasę, którą wcześniej wybrano, ale nie wolno przejść żadnego odcinka drogi więcej niż jeden raz. „Cykl” jest obejściem dookoła nie przechodzącym po drodze przez żaden punkt więcej niż jeden raz.

Przykład: (oparty na części połączeń kanałowych w Birmingham)

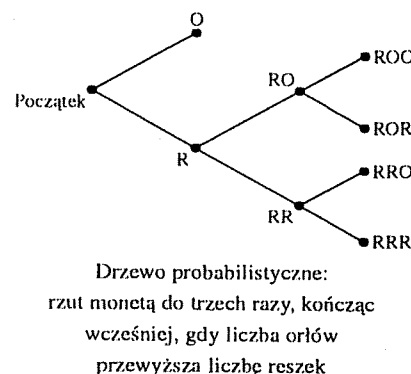
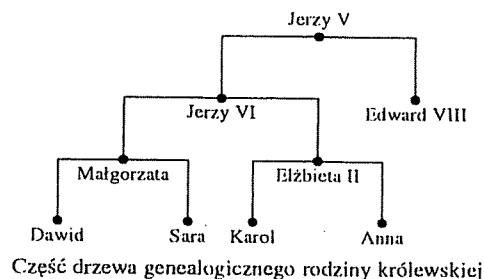


□

Z natury rzeczy graf w tym przykładzie ma tę własność, że jest możliwe przejście z dowolnego wierzchołka do każdego innego, wzdłuż pewnego szlaku: taki graf nazywa się *spójny*. Jeżeli własność ta nie zachodzi, to graf nazywa się *nie-spójny*: w tym przypadku graf składa się z pewnej liczby „kawałków” lub „składowych”. (Chcąc zdefiniować to w sposób formalny, musimy wprowadzić pojęcie *podgrafu* grafu $G = (V, E)$, który jest po prostu innym grafem, o zbiorze wierzchołków będącym podzbiorem zbioru V i zbiorze krawędzi będącym podzbiorem zbioru E . Wówczas *składowa* grafu jest jego maksymalnym spójnym podgrafem.)

W rozdziale tym będziemy się zajmować „drzewami”, które są szczególnym typem grafu. Z pewnością czytelnik spotkał się już ze słowem „drzewo”, użytym do opisanie pewnych grafowopodobnych struktur:

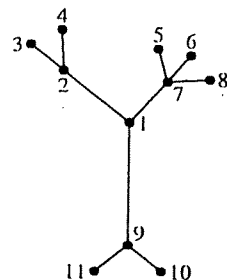
Przykłady:



□

Zauważmy, że struktury te mają dwie wspólne własności: po pierwsze składają się z jednego „kawałka”, a po drugie jakkolwiek wytyczono by na niej trasę (szlak), zawsze dojdzie się do „ślepej uliczki”. Te dwie własności są charakterystyczne dla „drzew”: dokładnie, *drzewo* jest to graf spójny bez cykli.

Przykład:



(11 wierzchołków; 10 krawędzi)

□

Wspomnieliśmy powyżej, że każdy szlak w drzewie doprowadzi w końcu do „ślepej uliczki”. Ogólnie, w grafie $G = (V, E)$ *stopień* wierzchołka $v \in V$ jest to liczba wierzchołków, z którymi v jest połączony; jest on zapisywany symbolicznie δv . W powyższym przykładzie wierzchołek 7 ma stopień $\delta 7 = 4$, a suma wszystkich stopni wynosi 20, co jest równe podwojonej liczbie krawędzi. Stosując tę nową terminologię, końce „ślepych uliczek” to, po prostu, wierzchołki o stopniu 1. Jeżeli drzewo ma więcej niż jeden wierzchołek, to wyobraźmy sobie „najdłuższą” możliwą ścieżkę, tj. taką, która ma najwięcej krawędzi. Nie jest trudno

Ile jest drzew?

zauważyć, że jeżeli ścieżka ta prowadzi od wierzchołka v do wierzchołka w , to oba v i w mają stopień 1. Skorzystamy z tego faktu w zadaniach, aby pokazać, że drzewo o n wierzchołkach ma dokładnie $n - 1$ krawędzi, a zatem, że suma stopni wszystkich jego wierzchołków wynosi $2n - 2$.

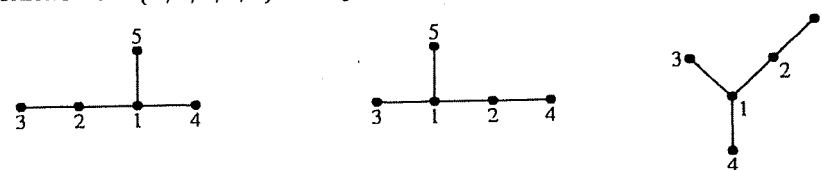
Możemy już przejść do zliczania drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$, z których każdy ma zadany stopień.

Przykład: Ile jest drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, w których stopnie wierzchołków wynoszą odpowiednio $\delta 1 = 3, \delta 2 = 2, \delta 3 = 1, \delta 4 = 1$ i $\delta 5 = 1$?

Rozwiązanie: Są tylko trzy takie drzewa. Aby wyznaczyć je w sposób systematyczny, zauważmy, że wierzchołek 5 musi być połączony dokładnie z jednym z pozostałych. Wyobraźmy sobie, że jest on połączony z wierzchołkiem i ; narysujmy drzewa, które otrzymamy po usunięciu wierzchołka 5 wraz z krawędzią $5i$:

$i = 1$ zbior wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$ $\delta 1 = 2 \delta 2 = 2 \delta 3 = 1 \delta 4 = 1$ lub 	$i = 2$ zbior wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$ $\delta 1 = 3 \delta 2 = 1 \delta 3 = 1 \delta 4 = 1$
$i = 3$ zbior wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$ $\delta 1 = 3 \delta 2 = 2 \delta 3 = 0 \delta 4 = 1$ nie ma takiego drzewa	$i = 4$ zbior wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$ $\delta 1 = 3 \delta 2 = 2 \delta 3 = 1 \delta 4 = 0$ nie ma takiego drzewa

Mając te mniejsze drzewa, łatwo jest już skonstruować żądane drzewa na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, dodając dodatkową krawędź $5i$:



□

Zastosujemy teraz tę ogólną regułę do zliczania drzew o zadanych stopniach wierzchołków:

Twierdzenie: Niech $n \geq 2$ i niech $d_1, \dots, d_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi, które sumują się do $2n - 2$. Wówczas liczba drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$, z których każdy ma stopień, odpowiednio, $\delta_1 = d_1, \dots, \delta_n = d_n$ wynosi

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!}$$

Dowód: Zauważmy najpierw, że $(d_1 - 1) + \dots + (d_n - 1) = n - 2$ oraz że wzór podany w twierdzeniu jest współczynnikiem wielomianowym

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}$$

Ściśle rzecz biorąc, twierdzenie jest równoważne faktowi, że jeżeli $d_1, \dots, d_n$ są dowolnymi liczbami całkowitymi (niekoniecznie dodatnimi), które sumują się do $2n - 2$, to liczba drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$, ze stopniami $d_1, \dots, d_n$ jest równa temu współczynnikowi wielomianowemu. W przypadku gdy którekolwiek d_i jest mniejsze bądź równe zero, wówczas zarówno liczba drzew, jak i dany współczynnik wielomianowy są równe zero.

Udowodnimy teraz twierdzenie przez indukcję względem n . Przypadek $n = 2$ jest oczywisty. Wówczas bowiem $d_1 = d_2 = 1$, czyli istnieje dokładnie jedno takie drzewo, i wartość współczynnika wielomianowego równa się w tym przypadku także 1.

Załóżmy więc, że $n > 2$, $d_1, \dots, d_n$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, sumującymi się do $2n - 2$, oraz że wynik jest prawdziwy dla wartości mniejszych od n . Ponieważ n dodatnich liczb całkowitych $d_1, \dots, d_n$ sumuje się do wielkości mniejszej niż $2n$, to jedna z tych liczb (powiedzmy d_n) jest równa 1. W ten sposób w drzewach, które staramy się zliczyć, wierzchołek n będzie połączony z dokładnie jednym z pozostałych wierzchołków, powiedzmy i . Wyobraźmy sobie (tak jak czyniliśmy to w poprzednim przykładzie) drzewa otrzymane przez usunięcie wierzchołka n oraz krawędzi ni . Drzewo takie będzie miało zbiór wierzchołków $\{1, \dots, n-1\}$ i stopnie $\delta_1 = d_1, \dots, \delta_i = d_i - 1, \dots$ oraz $\delta(n-1) = d_{n-1}$. Ponieważ i może przyjąć wszystkie możliwe wartości, otrzymujemy zatem

liczba drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$ z $\delta_1 = d_1,$ $\delta_2 = d_2, \dots, \delta_n = d_n$	$= \sum_{i=1}^{n-1}$	liczba drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n-1\}$ z $\delta_1 = d_1, \dots, \delta_i =$ $= d_i - 1, \dots, \delta(n-1) = d_{n-1}$
---	----------------------	---

A ile jest drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n-1\}$, z $\delta_1 = d_1, \dots, \delta_i = d_i - 1, \dots$ oraz $\delta(n-1) = d_{n-1}$? Ponieważ $d_1, \dots, d_i - 1, \dots, d_{n-1}$ sumują się

do $2(n-1) - 2$, więc założenie indukcyjne i nasze wstępne komentarze stwierdzają, że liczba takich drzew wynosi

$$\binom{(n-1)-2}{d_1-1, \dots, d_i-2, \dots, d_{n-1}-1}$$

Stąd

liczba drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$ z $\delta_1 = d_1, \delta_2 = d_2, \dots, \delta_n = d_n$	$= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-3}{d_1-1, \dots, d_i-2, \dots, d_{n-1}-1}$
--	---

Ale własność sumowania współczynników wielomianowych udowodniona w przykładzie na stronie 17 pokazuje, że suma ta wynosi

$$\begin{aligned} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_{n-1}-1} &= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_{n-1}-1)! \underbrace{(d_n-1)!}_{=1}} \end{aligned}$$

dając żądany wynik dla n . To, na mocy zasady indukcji, kończy dowód. $\square$

Zastosujemy teraz powyższe twierdzenie do zliczenia wszystkich drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$: ten zachwycający wynik jest nazywany „twierdzeniem Cayleya”, który pierwszy je sformułował (i udowodnił w przypadku gdy $n = 6$) w 1889 r. Więcej szczegółów o historii tego twierdzenia można znaleźć w fascynującej książce *Graph theory 1736–1936*, cytowanej w spisie literatury.

Twierdzenie: (Cayleya) Dla $n \geq 2$ liczba drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$ wynosi n^{n-2} .

Dowód: Zauważmy najpierw, iż rozwinięcie wielomianowe, wyprowadzone w ostatnim przykładzie poprzedniego rozdziału, mówi nam, że

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_n)^{n-2} &= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = n-2}} \binom{n-2}{k_1, \dots, k_n} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} \\ &= \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ (d_1-1) + \dots + (d_n-1) = n-2}} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} a_1^{d_1-1} \cdots a_n^{d_n-1} \end{aligned}$$

W szczególności, przyjmując każde a_i równe 1, otrzymujemy

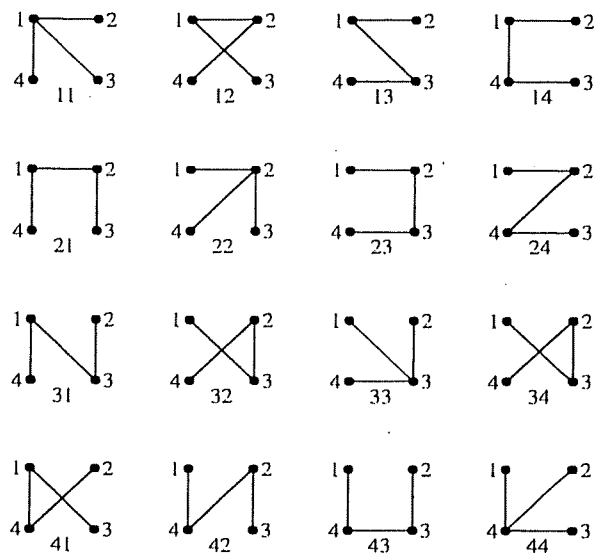
$$n^{n-2} = (1 + 1 + \dots + 1)^{n-2} = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_n = 2n-2}} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$$

Aby wyznaczyć liczbę drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$, musimy zsumować drzewa o zadanych ciągach stopni $d_1, \dots, d_n$ po wszystkich możliwych wartościach d_i . Wielkości $d_1, \dots, d_n$ muszą być dodatnimi liczbami całkowitymi, sumującymi się do $2n - 2$. W ten sposób, na mocy poprzedniego twierdzenia, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\begin{array}{c} \text{liczba drzew} \\ \text{na zbiorze wierzchołków} \\ \{1, \dots, n\} \end{array}} = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_n = 2n-2}} \boxed{\begin{array}{c} \text{liczba drzew na zbiorze} \\ \text{wierzchołków } \{1, \dots, n\} \text{ z} \\ \delta_1 = d_1, \delta_2 = d_2, \dots, \delta_n = d_n \end{array}} \\
 & = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_n = 2n-2}} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} \\
 & = n^{n-2}
 \end{aligned}$$

i twierdzenie Cayleya jest udowodnione. $\square$

Przykład: Jest 16 drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$. Również jest 16 uporządkowanych par liczb całkowitych postaci ab , przy czym a i b są dowolnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$: można więc „nazwać” te 16 drzew za pomocą 16 opisanych par liczb. Powód, dla którego wybraliśmy takie właśnie nazwy, stanie się jasny za chwilę.



$\square$

Ten bardzo wdzięczny wynik n^{n-2} określający liczbę drzew na n wierzchołkach doprowadził do szerokiej gamy interesujących dowodów twierdzenia Cayleya. Jeden z nich, z 1918 r., należący do Heinza Prüfera, wskazał na wzajemnie jednoznaczność zależności między rodziną wszystkich drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$ a rodziną ciągów złożonych z $n - 2$ elementów, wybranych w dowolny sposób (tj. z dopuszczalnymi powtórzeniami) z tego samego zbioru. Jego metoda umożliwia użycie tych ciągów do „nazwania” każdego drzewa w taki sposób, jak to zrobiliśmy w poprzednim przykładzie. Przedstawimy teraz algorytm Prüfera nadający „nazwę” danemu drzewu, znaną jako „kod Prüfera”.

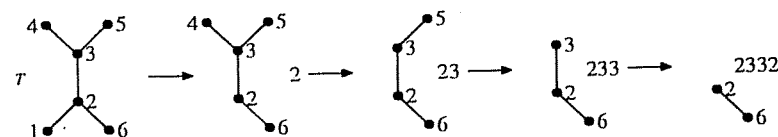
Algorytm: Aby wyznaczyć kod Prüfera dla danego drzewa T na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$, należy:

- I. Znaleźć najmniejszy wierzchołek o stopniu 1, powiedzmy v . Niech w będzie wierzchołkiem połączonym z v .
- II. Zapisać w oraz usunąć wierzchołek v wraz z krawędzią vw .
- III. Jeżeli w drzewie pozostała więcej niż jedna krawędź, to przejść do kroku I: w przeciwnym razie zakończyć algorytm.

Otrzymany ciąg liczb jest kodem Prüfera dla drzewa T . $\square$

Ponieważ drzewo T ma n wierzchołków oraz algorytm wypisuje za każdym razem jedną liczbę dopóty, dopóki nie pozostaną dwa wierzchołki, zatem wynikający ciąg będzie oczywiście złożony z $n - 2$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, n\}$.

Przykład: Stosując algorytm do przedstawionego drzewa T , otrzymujemy jego kod Prüfera w postaci 2332:



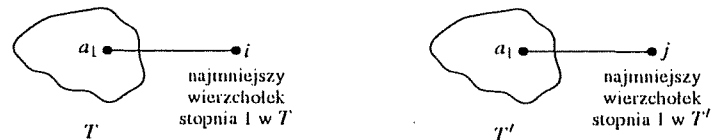
$\square$

Zauważmy, że w powyższym przykładzie każdy wierzchołek v występuje w kodzie $\delta v - 1$ razy. Jest jasne, że własność ta zawsze będzie zachodzić, gdyż algorytm zapisuje wierzchołek v za każdym razem, gdy usuwamy pewną krawędź z niego wychodzącą, tak długo, aż stopień wierzchołka v nie osiągnie 1.

Twierdzenie: Każdy ciąg $n - 2$ liczb wybranych w dowolny sposób ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ jest kodem Prüfera dokładnie jednego drzewa na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$.

Dowód: Mamy n^{n-2} drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$ oraz mamy n^{n-2} ciągów złożonych z $n - 2$ liczb wybranych dowolnie z tego zbioru. Zatem jeżeli pokażemy, że opisany algorytm daje dla różnych drzew różne kody, to będziemy mogli wnioskować, iż każdy taki ciąg jest kodem Prüfera dokładnie jednego drzewa.

Załóżmy więc, że oba drzewa T i T' na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$ mają ten sam kod Prüfera $a_1 a_2 \dots a_{n-2}$: naszym celem jest pokazanie, że $T = T'$. Z powyższych komentarzy wiemy, że każdy wierzchołek v występuje w kodzie $\delta v - 1$ razy. Ponieważ T i T' mają taki sam kod, wynika stąd, że stopień każdego wierzchołka v w T jest taki sam jak jego stopień w T' . Ponadto algorytm zapisał w każdym przypadku na pierwszym miejscu a_1 , więc T i T' mają następującą strukturę:



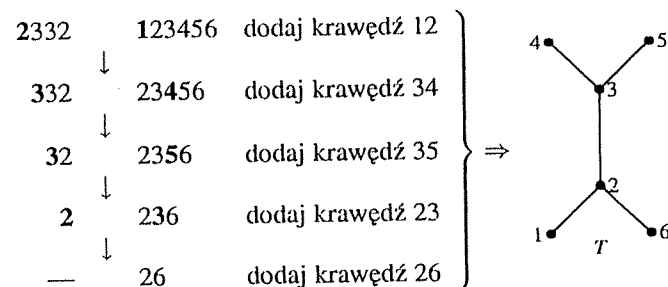
Po usunięciu w obu przypadkach krawędzi $a_1 i$ algorytm jest kontynuowany, moglibyśmy więc zastosować podobne rozumowanie do każdego z pomniejszych drzew. Kontynuując w ten sposób, staje się jasne, że T i T' mają identyczne krawędzie, a więc są takimi samymi drzewami, co było do udowodnienia. $\square$

Czy mając kod Prüfera jakiegoś drzewa, można zrekonstruować z niego konkretne drzewo? W ostatnim dowodzie można było już zauważyć, jak wyglądałaby taka rekonstrukcja: jeżeli $a_1 \dots a_{n-2}$ jest zadany kodem, to jego drzewo musi zawierać krawędź $a_1 i$, gdzie i jest najmniejszym wierzchołkiem stopnia 1. Ponieważ każdy wierzchołek v występuje w kodzie $\delta v - 1$ razy, wynika stąd, że i jest najmniejszym wierzchołkiem nie występującym w kodzie. Ta kluczowa obserwacja pozwala opisać algorytm, który wykonuje odwrotną procedurę do poprzedniego algorytmu; tj. wychodząc z kodu Prüfera konstruuje odpowiadające mu drzewo.

Algorytm: Dla danego ciągu liczb $a_1 \dots a_{n-2}$ wybranych w dowolny sposób ze zbioru $\{1, \dots, n\}$, aby wyznaczyć drzewo T , dla którego ciąg ten jest jego kodem Prüfera, należy:

- I. Zapisać dwie listy, pierwszą $a_1 \dots a_{n-2}$ oraz drugą $1, 2, \dots, n$, i rozpocząć ze zbioru wierzchołków $\{1, \dots, n\}$ i pustym zbiorem krawędzi.
- II. Wyznaczyć z drugiej listy najmniejszą liczbę, powiedzmy i , która nie występuje na pierwszej liście. Usunąć pierwszy element z pierwszej listy, powiedzmy j , usunąć i z drugiej listy oraz dodać do zbioru krawędzi krawędź ij .
- III. Jeżeli pierwsza lista zawiera co najmniej jedną liczbę, to przejść do II. W przeciwnym razie, jeżeli pierwsza lista jest pusta, to druga lista będzie składała się z dokładnie dwóch liczb. Dodać do zbioru krawędzi ostatnią krawędź, której wierzchołkami końcowymi są te właśnie liczby i zakończyć algorytm.

Przykład: Rekonstrukcja drzewa T o kodzie Prüfera 2332 (takim jak w poprzednim przykładzie):



Gdy zliczaliśmy drzewa na n wierzchołkach, oznaczyliśmy wierzchołki liczbami $1, 2, \dots, n$. Jeśli wierzchołki nie są oznaczone, problem przeliczania drzew jest zupełnie odmienny (i, dla dużych n , nieco trudniejszy). Dla przykładu na liście 16 drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$ są zasadniczo tylko dwie różne struktury, mianowicie



W większości naszych przyszłych rozważań o grafach, faktyczne etykiety przyporządkowane wierzchołkom nie będą miały znaczenia.

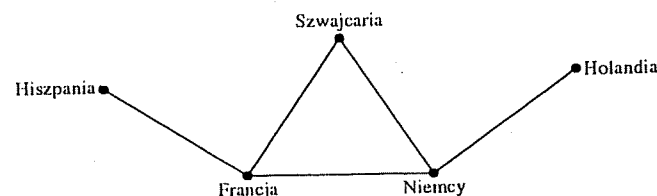
Przykład: Niech $G' = (V', E')$ będzie grafem składającym się z wierzchołków

$$V' = \{\text{Francja, Niemcy, Hiszpania, Szwajcaria, Holandia}\}$$

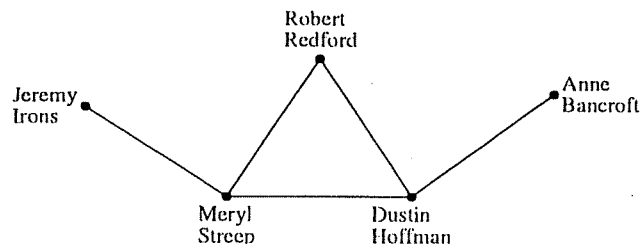
i niech zbiór krawędzi będzie zdefiniowany następująco:

$$E' = \{vw : v, w \text{ mają wspólną granicę}\}$$

Wówczas G' może być zilustrowany jako:



Jeżeli pominiemy etykiety przy wierzchołkach, to graf ten będzie miał taką samą strukturę jak „aktorski” przykład $G = (V, E)$, na początku tego rozdziału:

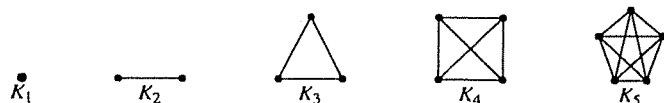


□

Formalnie te dwa grafy są *izomorficzne* (tzn. istnieje bijekcja z V na V' – przekształcająca na przykład $v = \text{Robert Redford}$ na $v' = \text{Szwajcaria}$ – taka, że vw jest krawędzią w G wtedy i tylko wtedy, gdy $v'w'$ jest krawędzią w G'). Inne przykłady grafów izomorficznych to drzewo genealogiczne i drzewo probabilistyczne z wcześniejszego przykładu na stronie 24.

Pojęcia te nie powinny nas przesadnie niepokoić: w następnych rozdziałach będziemy w ogólności interesować się tylko strukturą grafu, a nie konkretnymi etykietami wierzchołków.

Przykłady: Graf pełny K_n składa się z n wierzchołków, z których każda para połączona jest krawędzią:



Dwudzielny graf pełny $K_{m,n}$ składa się z $m+n$ wierzchołków i mn krawędzi, przy czym każdy z m wierzchołków jest połączony z każdym z pozostałych n wierzchołków:



□

ZADANIA

- Ile jest krawędzi w grafie pełnym K_n ? [O]
 - Ile jest grafów na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$, mających dokładnie m krawędzi? [W,O]
 - Ile jest wszystkich grafów na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$? [W,O]

- (Lemat o uściskach dłoni). Pokazać, że w dowolnym grafie $G = (V, E)$

$$\sum_{v \in V} \delta_v = 2|E|$$

gdzie $|E|$ oznacza liczbę krawędzi. (Ogólnie stosujemy zapis $|X|$ do oznaczenia liczby elementów w zbiorze X). [W]

- Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, w którym $E \neq \emptyset$ i w którym każdy wierzchołek ma parzysty stopień. Rozważając nietrywialne składowe (a więc takie, w których każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 2) pokazać, że G zawiera cykl. Pokazać również, że jeżeli usuniemy z grafu krawędzie należące do tego cyklu, to w nowym grafie każdy wierzchołek w dalszym ciągu ma parzysty stopień. Wywnioskować, że w G istnieje zbiór cykli zawierających każdą krawędź z E dokładnie jeden raz. [W]

- Udowodnić, że dla każdego drzewa $G = (V, E)$ zachodzi $|E| = |V| - 1$. [W]
 - Pokazać, że jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem spójnym i $|E| = |V| - 1$, to G jest drzewem. [W]

- Dla $n \geq 2$, ile spośród n^{n-2} drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$ ma: [O]

(i) wierzchołek stopnia $n-1$?

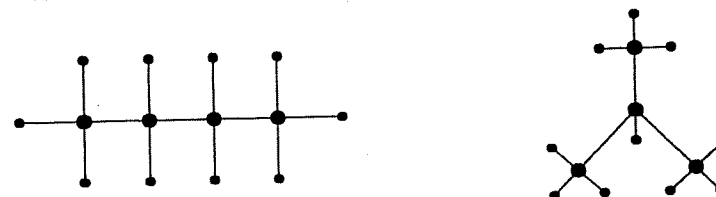
(ii) wierzchołek stopnia $n-2$? [W,O]

(iii) wszystkie wierzchołki stopnia 1 lub 2? [W,O]

(iv) stopień wierzchołka 1 równy jeden? [W,O]

Pokazać, że proporcja tych spośród n^{n-2} drzew, dla których $\delta_1 = 1$, dąży do $1/e$, gdy n dąży do nieskończoności. [W]

- Cząsteczki węglowodoru składają się z atomów węgla (o wartościowości 4) i atomów wodoru (o wartościowości 1) i mogą być przedstawione jako grafy spójne. Dla przykładu zarówno cząsteczki butanu, jak i 2-metylopropanu (izobutanu) zawierają cztery atomy węgla i dziesięć atomów wodoru, tak jak zostało zilustrowane:



Te dwie nieizomorficzne struktury o tym samym wzorze chemicznym C_4H_{10} są przykładami *izomerów*.

(i) Pokazać, że każda cząsteczka węglowodoru o wzorze postaci C_nH_{2n+2} (zwana *parafiną* lub *alkanem*) ma strukturę drzewa, natomiast cząsteczki o wzorze postaci C_nH_{2n} (*alkeny*) nie mają struktury drzewa. [W]

(ii) Pokazać, że powyższe dwa przykłady są jedynymi izomerami postaci C_4H_{10} i wyznaczyć największą możliwą liczbę izomerów postaci C_3H_8 i postaci C_5H_{12} . [W,O]

7. Pokazać, że dla grafu $G = (V, E)$ o k składowych zachodzi

$$|V| - k \leq |E| \leq \frac{1}{2}(|V| - k)(|V| - k + 1) \quad [W]$$

3

Twierdzenie o małżeństwach

Poprzednie rozdziały dotyczyły *zliczania* różnych wyborów, w obecnym będzie mowa o *istnieniu* określonych typów wyborów elementów ze zbiorów. Zagadnienie to koncentruje się wokół słynnego twierdzenia, sformułowanego przez Philipa Halla w 1935 r. Najłatwiej zrozumieć je, gdy jest prezentowane w wersji „małżeńskiej”, w której selekcje polegają na wybieraniu żon dla mężów (lub na odwrót). Potem jednak wyprowadzimy różne inne postacie tego twierdzenia, a w następnych rozdziałach przedstawimy wiele jego zastosowań.

Przykład: W grupie złożonej z siedmiu chłopców i sześciu dziewcząt w wieku małżeńskim:

dziewczyna 1 zna chłopców 1', 2' i 3'

dziewczyna 2 zna chłopców 2' i 3'

dziewczyna 3 zna chłopców 3', 5' i 7'

dziewczyna 4 zna chłopców 1' i 2'

dziewczyna 5 zna chłopców 1', 2' i 3'

dziewczyna 6 zna chłopców 4', 5' i 6'

Czy jest możliwe znalezienie męża dla każdej z dziewcząt (tj. dla każdej innego chłopca spośród tych, których zna)?

Rozwiązanie: Znalezienie męża dla każdej z dziewcząt jest niemożliwe. Przekonujemy się o tym, gdy zauważymy, że cztery dziewczyny 1, 2, 4 i 5 znają tylko trzech chłopców 1', 2' i 3': nie ma więc oczywiście żadnej nadziei na znalezienie męża dla każdej z tych czterech dziewcząt. $\square$

Jest jasne, że, aby zaistniała jakakolwiek szansa znalezienia każdej dziewczynie męża, musi zachodzić sytuacja taka, iż dowolny podzbiór dziewcząt (powiedzmy r spośród nich) zna co najmniej r chłopców. W rzeczywistości okazuje się, że mężowie mogą być znalezieni **wtedy i tylko wtedy**, gdy jest spełniony ten warunek.

Przykład:

Dziewczyna 1 zna chłopców $1'$ i $3'$
 dziewczyna 2 zna chłopców $2'$ i $3'$
 dziewczyna 3 zna chłopców $1'$, $3'$, $4'$ i $5'$
 dziewczyna 4 zna chłopców $2'$, $4'$, $6'$ i $7'$
 dziewczyna 5 zna chłopców $1'$ i $5'$
 dziewczyna 6 zna chłopców $1'$ i $2'$

W tym przypadku każdy zbiór dziewcząt zna co najmniej tylu chłopców, ile jest w nim dziewcząt. Na przykład dziewczęta $\{1, 2, 6\}$ znają chłopców $\{1', 2', 3'\}$. Czy możemy dla każdej dziewczyny znaleźć męża spośród chłopców, których zna?

Rozwiązanie: Można łatwo znaleźć mężów dla dziewcząt, stosując metodę prób i błędów. My jednak użyjemy procesu, który w istocie rzeczy będzie funkcjonować w ogólnym przypadku (jak zobaczymy to w dowodzie następnego twierdzenia). Zaczniemy wybierać w dowolny sposób różnych chłopców dla każdej z dziewcząt tak długo, jak długo nie znajdzie się dziewczyna, dla której nie pozostał do wyboru żaden chłopak. Na przykład dziewczyna 1 mogłaby zaręczyć się z chłopcem $1'$, 2 z $2'$, 3 z $3'$, 4 z $4'$ i 5 z $5'$. Lecz wówczas dziewczyna 6 zna tylko chłopców $1'$ i $2'$, a oni są już zaręczeni. W jaki sposób może ona znaleźć partnera?

Dziewczyna 6 urządza przyjęcie. Zaprasza wszystkich chłopców, których zna: ci zapraszają swoje narzeczone: dziewczyny te zapraszają wszystkich znajomych chłopców, którzy nie zostali jeszcze zaproszeni: ci chłopcy zapraszają swoje narzeczone: dziewczyny te zapraszają wszystkich znajomych chłopców, którzy nie zostali jeszcze zaproszeni: Procedura ta trwa tak długo, aż zostanie zaproszony chłopiec (powiedzmy C'), który nie jest jeszcze zaręczony. W naszym przypadku takie postępowanie doprowadza do sytuacji

$\{6\}$ zaprasza $\{1', 2'\}$ zaprasza $\{1, 2\}$ zaprasza $\{3'\}$ zaprasza
 $\{3\}$ zaprasza $\{4', 5'\}$ zaprasza $\{4, 5\}$ zaprasza $\{6', 7'\}$

Zatrzymaliśmy się w tym miejscu, bo na przykład $C' = 7'$ nie jest zaręczony. Zaczynają się tańce. Chłopak $C'(7')$ tańczy ze znajomą dziewczyną, która go zaprosiła na przyjęcie (4). Jej naręczony (4') jest trochę strapiiony, więc tańczy z dziewczyną, która go zaprosiła (3): jej naręczony (3') jest trochę wytrącony z równowagi, więc tańczy z dziewczyną, która go zaprosiła (1): jej naręczony (1') jest trochę zirytowany, więc tańczy z dziewczyną, która go zaprosiła (6). W efekcie poruszamy się z powrotem poprzez zbiory wypisane powyżej:

$\{6\} - \{1', 2'\} - \{1, 2\} - \{3'\} - \{3\} - \{4', 5'\} - \{4, 5\} - \{6', 7'\}$

Niektóre zaręczone pary $(1, 1'; 3, 3'; 4, 4')$ wraz z dziewczyną 6 i chłopcem $7'$ utworzyły nowe pary

Ten „pełen słodczy” taniec jest tak udany, że tańczące pary zrywają wszystkie poprzednie zaręczyny i zaręczają się między sobą. Żadna z pozostałych par nie uległa rozpadowi. To daje

$1 \text{ zaręczona z } 3' : 2 \text{ z } 2' : 3 \text{ z } 4' : 4 \text{ z } 7' : 5 \text{ z } 5' \text{ i } 6 \text{ z } 1'$

i udało się nam znaleźć mężów dla wszystkich dziewcząt. $\square$

Twierdzenie: (Twierdzenie Halla – wersja małżeńska) W grupie dziewcząt każda może wybrać męża spośród chłopców, których zna, wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym podzbiorze dziewcząt (powiedzmy r spośród nich), dziewczyny te znają co najmniej r chłopców.

Dowód: ($\Rightarrow$) Jeżeli każda dziewczyna może znaleźć męża, to oczywiście każde r dziewcząt musi znać co najmniej r chłopców, to jest swoich mężów.

($\Leftarrow$) Niech dziewczęta będą oznaczone symbolicznie $1, 2, \dots, n$ i założmy, że każdy ich podzbiór (powiedzmy r elementowy) zna co najmniej r chłopców. Pokażemy metodą indukcji względem m ($1 \leq m \leq n$), że wszystkie dziewczyny $1, 2, \dots, m$ mogą znaleźć mężów spośród chłopców, których znają.

Przypadek $m = 1$ jest banalny, gdyż dziewczyna 1 zna co najmniej jednego chłopca, którego może wybrać na męża. Założmy więc, że $m \geq 1$, że dziewczyny $1, 2, \dots, m$ znalazły już naręczonych (nazwanych symbolicznie $1', 2', \dots, m'$) i że chcemy teraz znaleźć naręczonych dla dziewczyn $1, 2, \dots, m$ i $m+1$. Tych $m+1$ dziewcząt zna co najmniej $m+1$ chłopców i tylko m spośród tych chłopców jest zaręczonych. Tak więc chciałoby się powiedzieć, że dziewczyna oznaczona przez $m+1$ musi znać chłopca, który nie jest zaręczony: jeżeli rzeczywiście zna, to możemy znaleźć dla niej narzeczonego i dowód jest zakończony. Jednakże (i to jest ten moment, który czyni rezultat nieoczywistym), mimo że dziewczyny $1, 2, \dots, m, m+1$ znają co najmniej $m+1$ chłopców, dziewczyna $m+1$ może osobiście znać tylko chłopców spośród $1', 2', \dots, m'$, z których wszyscy są już zaręczeni. Jak więc znajdzie ona narzeczonego dla siebie?

Tak jak w poprzednim przykładzie, dziewczyna $m+1$ urządza przyjęcie. Zaprasza wszystkich chłopców, których zna: oni zapraszają swoje narzeczone: dziewczyny te zapraszają wszystkich znajomych chłopców, którzy nie zostali jeszcze zaproszeni: chłopcy ci zapraszają swoje narzeczone: dziewczyny te zapraszają wszystkich znajomych chłopców, którzy nie zostali jeszcze zaproszeni: Proces ten trwa tak długo, aż zostanie zaproszony chłopak (powiedzmy C'), który nie jest jeszcze zaręczony.

Czy musi się tak stać? Czy w końcu będzie zaproszony chłopiec, który nie jest zaręczony? Zaprezentujemy tę sytuację za pomocą pewnych zbiorów, przy czym dla prostoty oznaczeń zakładamy, iż „nazwiska” chłopców są dobrane tak, aby byli oni zapraszani w porządku numerycznym:

$\{m+1\}$ zaprasza $\{1', \dots, i'\}$ zaprasza $\{1, \dots, i\}$ zaprasza $\{(i+1)', \dots, j'\}$
 zaprasza ... zaprasza $\{(k+1)', \dots, l'\}$ zaprasza $\{k+1, \dots, l\}$ zaprasza $\{\dots C' \dots\}$

Skąd wiemy, że proces ten trwać będzie tak długo, aż zostanie zaproszony jakiś nowy nie zaręczony chłopiec? Gdyby żaden nowy nie zaręczony chłopiec nie został zaproszony, w charakterystycznym momencie tego procesu, kiedy mamy zbiór nowo zaproszonych dziewcząt $\{k+1, \dots, l\}$, kto byłby wówczas następnym zaproszonym? Do tej pory na przyjęciu mamy dziewczyny $m+1$ i $1, 2, \dots, l$ oraz chłopców $1', 2', \dots, l'$ (i są wśród nich wszyscy chłopcy znani dziewczynom $1, 2, \dots, k$), lecz w sumie jest to mniej chłopców niż dziewcząt. Stąd, na mocy zadanego warunku o dziewczynach znających co najmniej tylu chłopców, ile jest dziewcząt, w dalszym ciągu pozostaje do zaproszenia chłopiec znany jednej z tych dziewcząt (a więc jednej spośród $k+1, \dots, l$). W konsekwencji proces będzie kontynuowany. Jest tylko skończona liczba zaręczonych chłopców, tak więc w pewnym momencie proces ten obejmie chłopca C' , który nie jest jeszcze zaręczony.

Przyjęcie jest bardzo udane, chłopiec C' tańczy z jedną z dziewcząt, która go zaprosiła. Jej narzeczony jest trochę wytrącony z równowagi, więc tańczy z dziewczyną, która go zaprosiła: jej narzeczony jest trochę strapiiony, więc tańczy z dziewczyną, która go zaprosiła: ... i (tak jak w poprzednim przykładzie) wyznacza to drogę powrotną poprzez zadaną powyżej listę zbiorów, doprowadzając w końcu do chłopca tańczącego z dziewczyną $m+1$:

$$\{m+1\} - \{\dots z' \dots\} - \{\dots z \dots\} - \dots - \{\dots c' \dots\} - \{\dots c \dots\} - \{\dots C' \dots\}$$

Tworzenie się nowych zaręczonych par, w skład których wchodzi dziewczyna $m+1$ i chłopiec C'

Ten taniec jest tak udany, że tańczące pary zrywają wszystkie poprzednie zobowiązania i zaręczają się między sobą. Pozostałe (nie tańczące) pary nie ulegają rozpadowi. Krótka chwila namysłu pokazuje, że efektem tego procesu jest zamiana par wśród osób tańczących wraz z dziewczyną $m+1$ i chłopcem C' w inne zaręczone pary. Tak więc znaleźliśmy narzeczonych dla wszystkich dziewcząt $1, 2, \dots, m+1$, i dowód przez indukcję jest zakończony. $\square$

Dowód ten nie jest ani krótki, ani bardzo wyrafinowany, ma on jednak tę zaletę, że faktycznie pokazuje, jak można dokonać wyboru mężów. Co więcej, pokazuje on trudność, jaką napotyka się przy podziale na nowe pary, jeżeli bierze się pod uwagę w danym momencie tylko jedną z nich. To jest właśnie to, co studenci często próbują robić, dostarczając własne „dowody” twierdzenia, które wydaje się im proste. W rzeczywistości jest to skomplikowany wynik z szerokim wachlarzem zastosowań. Inny dowód twierdzenia Halla będzie można znaleźć w zadaniach, a jeszcze dalsze można odszukać w książkach Leona Mirsky'ego *Transversal theory* i Robina Wilsona *Introduction to graph theory* oraz w specjalistycznej pracy *Independence theory in combinatorics*, wszystkie one są cytowane w spisie literatury. (Jako wskaźnik ważności twierdzenia, warto podkreślić, że książka *Transversal theory* mogłaby mieć podtytuł „Twierdzenie Halla i jego wnioski”

i że zawiera ona 255 stron wyników). Teoria transwersal bazuje na twierdzeniu Halla w jego teoriomnogościowej postaci. Przejdziemy więc teraz do zbadania „transwersalowej” i teoriografowej postaci twierdzenia.

Rodzina zbiorów jest to pewna uporządkowana lista zbiorów $\mathfrak{A} = (A_1, \dots, A_n)$ (do naszych celów wystarczy, że zbiory zawsze będą skończone). *Transwersala* (lub *system różnych reprezentantów*) rodziny $\mathfrak{A}$ jest to zbiór X , gdzie $|X| = n$, którego elementy mogą zostać zapisane w pewnym porządku, powiedzmy $X = \{a_1, \dots, a_n\}$, w ten sposób, że $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$; innymi słowy, n różnych elementów zbioru X „reprezentuje” n zadanych zbiorów.

Przykłady: Niech rodzina $\mathfrak{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ będzie określona następująco:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 3\} \\ A_2 &= \{2, 3\} \\ A_3 &= \{1, 3, 4, 5\} \\ A_4 &= \{2, 4, 6, 7\} \\ A_5 &= \{1, 5\} \\ A_6 &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

Wówczas rodzina ta ma transwersalę $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (lub, w bardziej odpowiednim uporządkowaniu, $\{3, 2, 4, 7, 5, 1\}$: gdyż 3 może być użyta do reprezentowania A_1 , $2 \in A_2$, $4 \in A_3$, $7 \in A_4$, $5 \in A_5$ i $1 \in A_6$, jak pokazano za pomocą cyfr wyróżnionych pismem półgrubym. Natomiast rodzina $\mathfrak{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$, gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, 3\} \\ A_2 &= \{2, 3\} \\ A_3 &= \{3, 5, 7\} \\ A_4 &= \{1, 2\} \\ A_5 &= \{1, 2, 3\} \\ A_6 &= \{4, 5, 6\} \end{aligned}$$

nie ma transwersali, bo na przykład zbiory A_1, A_2, A_4 i A_5 w sumie zawierają tylko trzy elementy; tj.

$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5 = \{1, 2, 3\}$$

W ogólności jest jasne, że, aby mieć jakkolwiek nadzieję na znalezienie systemu różnych reprezentantów dla rodziny $\mathfrak{A} = (A_1, \dots, A_n)$, konieczne potrzeba, by suma każdych r spośród tych zbiorów, powiedzmy $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$, zawierała co

najmniej r elementów; tj.

$$\left| \bigcup_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} A_i \right| \geq |\{i_1, \dots, i_r\}|$$

Można to zapisać bardziej zwięźle jako

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$$

gdzie I jest dowolnym zbiorem indeksów wybranych z $\{1, \dots, n\}$.

Jak zapewne niektórzy zauważą, warunek ten oraz dwa powyższe przykłady są bardzo podobne do wcześniejszych przykładów małżeńskich. Rzeczywiście, jeżeli pomyśli się o zbiorze A_1 jako zbiorze chłopców, których zna dziewczyna 1, o zbiorze A_2 jako zbiorze chłopców, których zna dziewczyna 2 itd., to wówczas znalezienie różnych reprezentantów zbiorów jest tym samym co znalezienie męża dla każdej z dziewcząt. Ta obserwacja pozwala wywnioskować teoriomno-gościową wersję twierdzenia Halla:

Wniosek: (Twierdzenie Halla – postać transwersalowa) Rodzina $\mathfrak{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$$

dla wszystkich $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Dowód: Wyobraźmy sobie n „dziewcząt” oznaczonych symbolicznie $1, 2, \dots, n$ i niech dla każdego i zbiór A_i obejmuje „chłopców”, których zna dziewczyna i . Wówczas, stosując do tych dziewcząt i chłopców twierdzenie Halla, otrzymujemy

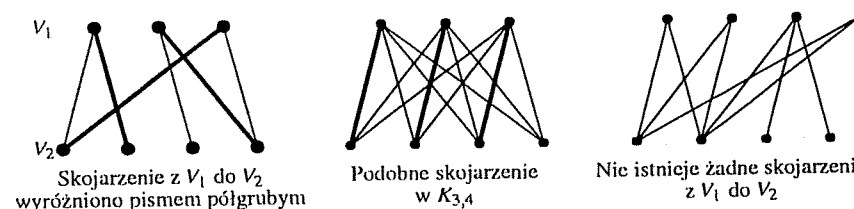
$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \text{ ma transwersalę} &\Leftrightarrow \text{dziewczyny } 1, \dots, n \text{ mogą znaleźć} \\ &\quad \text{mężów spośród chłopców, których znają} \\ &\Leftrightarrow \text{dziewczyny z dowolnego zbioru } I \\ &\quad \text{znają co najmniej } |I| \text{ chłopców} \\ &\Leftrightarrow \text{dla każdego } I \text{ zbiór } \bigcup_{i \in I} A_i \text{ zawiera} \\ &\quad \text{co najmniej } |I| \text{ chłopców} \\ &\Leftrightarrow \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I| \text{ dla każdego } I \subseteq \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

□

Wyprowadzimy teraz teoriografową wersję twierdzenia Halla. Graf $G = (V, E)$ jest *dwudzielny*, jeżeli zbiór jego wierzchołków może być podzielony na dwa

zbiory V_1 i V_2 w ten sposób, że każda krawędź grafu G łączy wierzchołek należący do V_1 z wierzchołkiem należącym do V_2 . Kiedy wystąpi potrzeba nazwania tych dwóch zbiorów wierzchołków, będziemy stosowali dla takiego grafu notację $G = (V_1, E, V_2)$. *Skojarzeniem z V_1 do V_2* w takim grafie jest zbiór złożony z $|V_1|$ krawędzi, które nie mają wspólnych wierzchołków końcowych. (W ten sposób każdy wierzchołek z V_1 będzie połączony jedną z krawędzi skojarzenia z innym wierzchołkiem z V_2). Dwudzielny graf pełny $K_{m,n}$, zdefiniowany w rozdziale 2, jest przykładem grafu dwudzielnego z m wierzchołkami tworzącymi zbiór V_1 i z pozostałymi n wierzchołkami tworzącymi zbiór V_2 . Jeżeli $m \leq n$, to graf ten będzie zawierał skojarzenie z V_1 do V_2 .

Przykład: Pewne grafy dwudzielne i pewne skojarzenia:



□

Pomyślmy teraz o wierzchołkach z V_1 jak o „dziewczynach”, a o wierzchołkach z V_2 jak o „chłopcach”, przy czym krawędź łącząca dziewczynę z chłopcem oznacza, że dziewczyna zna chłopca. Łatwo wówczas zauważyć, iż skojarzenie z V_1 do V_2 jest niczym innym jak zbiorem związków małżeńskich, otrzymanych przez wybranie dla każdej dziewczyny męża. Obserwacja ta pozwala nam wywnioskować teoriografową wersję twierdzenia Halla, bez jakiegokolwiek dalszego dowodu. Sformułujemy również macierzową postać tego twierdzenia, a jego dowód pozostawimy jako jedno z zadań.

Wniosek (Twierdzenie Halla – postać grafowa) Niech G będzie grafem dwudzielnym (V_1, E, V_2) . Wówczas G ma skojarzenie z V_1 do V_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru I wierzchołków z V_1 , istnieje co najmniej $|I|$ wierzchołków w V_2 , połączonych z elementami zbioru I .

□

Wniosek (Twierdzenie Halla – postać macierzowa) Niech M będzie zero-jedynkową macierzą wymiaru $m \times n$. Wówczas w każdym wierszu macierzy M występuje jedynka, spośród których żadne dwie nie są w tej samej kolumnie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego r wszystkie jedynki dowolnego podzbioru wierszy macierzy M mocy r , są zawarte w co najmniej r kolumnach.

□

Będzie nam potrzebne później uogólnienie twierdzenia Halla, które dotyczy problemu znalezienia mężów dla danego zbioru dziewczyn z dodatkowym warunkiem, że wśród wybranych mężów są pewni, z góry ustaleni chłopcy.

Przykład:

- Dziewczyna 1 zna chłopców $A_1 = \{1, 2, 7\}$
 dziewczyna 2 zna chłopców $A_2 = \{5, 6, 8\}$
 dziewczyna 3 zna chłopców $A_3 = \{1, 3, 7\}$
 dziewczyna 4 zna chłopców $A_4 = \{2, 3, 4, 7\}$
 dziewczyna 5 zna chłopców $A_5 = \{1, 2, 6, 8\}$

Jest oczywiście możliwe znalezienie tym dziewczętom mężów spośród chłopców, których znają: jeden z takich układów wyróżniono pismem półgrubym. Jednak, czy jest możliwe znalezienie dla każdej dziewczyny męża w ten sposób, że w szczególności chłopcy 5, 6, 7 i 8 ożenią się? Nie, ponieważ na przykład dziewczyny 1, 3 i 4 znają chłopców 1, 2, 3, 4 i 7, a zatem te trzy dziewczyny mogą wyjść za mąż tylko za jednego wyszczególnionego chłopca, tj. 7. Stąd pozostałe dwie dziewczyny (2 i 5) musiałyby wyjść za mąż za pozostałych trzech wyróżnionych chłopców (5, 6 i 8), co jest niemożliwe. $\square$

Tak, jak ilustruje to ten przykład, aby istniała jakakolwiek szansa na znalezienie mężów dla grupy dziewcząt w ten sposób, że dodatkowo wyszczególniony zbiór P chłopców jest wśród mężów, musi dla każdego podzbioru dziewcząt I zachodzić oczywiście następujący warunek:

$$\begin{array}{c} \text{liczba chłopców w } P \text{ nie znających} \\ \text{żadnej dziewczyny z } I \end{array} \leq \begin{array}{c} \text{liczba dziewcząt} \\ \text{nie zawartych w } I \end{array}$$

Pokażemy teraz, że te warunki są konieczne i dostateczne. Sformułujemy i udowodnimy ten wynik w postaci transwersalowej.

Twierdzenie: Niech $\mathfrak{A} = (A_1, \dots, A_n)$ będzie rodziną zbiorów i niech $P \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Wówczas $\mathfrak{A}$ ma transwersalę, która zawiera zbiór P wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $\mathfrak{A}$ ma transwersalę,
 oraz

$$(ii) \quad \left| P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \right| \leq n - |I| \text{ dla każdego } I \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że potrafimy wyznaczyć dla $\mathfrak{A}$ żadaną transwersalę. Wówczas, oczywiście, natychmiast wynika (i). W terminologii dotyczącej małżeństw zakładamy, że możemy znaleźć „dziewczętom” mężów, wśród których są chłopcy ze zbioru P . Jak widzieliśmy powyżej, to oznacza, że dla każdego zbioru dziewcząt I , chłopcy z P , których one nie znają, muszą mieć żony nie należące do I . Stąd liczba takich chłopców w P jest mniejsza bądź równa liczbie dziewcząt nie będących elementami zbioru I . W języku teorii mnogości oznacza to dokładnie warunek (ii).

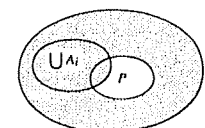
($\Leftarrow$) Załóżmy, że rodzina $\mathfrak{A}$ spełnia warunki (i) oraz (ii), a ponadto, że $A_1 \cup \dots \cup A_n = B$, gdzie $|B| = m$. Utwórzmy teraz nową rodzinę $\mathfrak{A}^*$, złożoną

z m zbiorów, określoną następująco:

$$\mathfrak{A}^* = (A_1, \dots, A_n, \underbrace{B \setminus P, B \setminus P, \dots, B \setminus P}_{m-n \text{ razy}})$$

Twierdzimy, że zadane warunki (i) oraz (ii) zapewniają, iż $\mathfrak{A}^*$ ma transwersalę: musimy sprawdzić, że dowolne r zbiorów w $\mathfrak{A}^*$ zawiera w sumie co najmniej r elementów. Jeżeli te zbiory są wybrane jedynie spośród zbiorów $A_1, \dots, A_n$, to na mocy (i) jest jasne, że zawierają one co najmniej r elementów. Jeżeli, z drugiej strony, na tych r zbiorów z $\mathfrak{A}^*$ składają się zbiory $\{A_i : i \in I\}$ spośród $A_1, \dots, A_n$ oraz $r - |I| (> 0)$ zbiorów spośród pozostałych, to suma mnogościowa tych r zbiorów wynosi

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup (B \setminus P) = B \setminus \left(P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \right)$$



która, na mocy (ii), zawiera

$$m - \left| P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \right| \geq m - (n - |I|)$$

elementów. Ale $r - |I|$ jest liczbą kopii zbioru $B \setminus P$ wybranych z $\mathfrak{A}^*$, a więc nie może ona być większa niż $m - n$. Stąd

$$r - |I| \leq m - n \quad \text{czyli} \quad m - (n - |I|) \geq r$$

W konsekwencji tych r zbiorów z $\mathfrak{A}^*$ zawiera co najmniej r elementów.

Stosując do $\mathfrak{A}^*$ transwersalową postać twierdzenia Halla otrzymujemy, że rodzina $\mathfrak{A}^*$ składająca się z m zbiorów ma następującą transwersalę:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A}^* = (A_1, \dots, A_n, B \setminus P, B \setminus P, \dots, B \setminus P) \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a_1 \quad \dots \quad a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2} \quad \dots \quad a_m \end{array}$$

Ta transwersala złożona z m różnych reprezentantów z $\mathfrak{A}^*$ jest podzbiorem zbioru $A_1 \cup \dots \cup A_n = B$, który zawiera łącznie tylko m elementów. Wynika stąd, że transwersala rodziny $\mathfrak{A}^*$ musi być dokładnie zbiorem B i, w szczególności, że musi ona zawierać zbiór P . Ale, które zbiory w $\mathfrak{A}^*$ są reprezentowane przez elementy z P ? Oczywiście żaden ze zbiorów $B \setminus P$. Mamy więc

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A}^* = (A_1, \dots, A_n, B \setminus P, B \setminus P, \dots, B \setminus P) \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a_1 \quad \dots \quad a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2} \quad \dots \quad a_m \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{zawiera } P} \end{array}$$

i zbiór $\{a_1, \dots, a_n\}$ jest transwersalą rodziny $\mathfrak{A}$ zawierającą zbiór P . Stąd więc warunki (i) oraz (ii) rzeczywiście zapewniają istnienie transwersali rodziny $\mathfrak{A}$ zawierającej P , co było do udowodnienia. $\square$

ZADANIA

1. W której z następującej sytuacji mogą zostać znalezieni mężowie dla każdej z dziewcząt, spośród chłopców, których znają?

- (i) Dziewczyna 1 zna chłopców $\{1, 2\}$
 dziewczyna 2 zna chłopców $\{1, 2, 4\}$
 dziewczyna 3 zna chłopców $\{1, 2, 3\}$
 dziewczyna 4 zna chłopców $\{1, 3\}$
 dziewczyna 5 zna chłopców $\{4, 5, 6\}$
 dziewczyna 6 zna chłopców $\{1, 2, 5\}$
- (ii) Dziewczyna 1 zna chłopców $\{1, 3, 5\}$
 dziewczyna 2 zna chłopców $\{1, 3\}$
 dziewczyna 3 zna chłopców $\{1, 5\}$
 dziewczyna 4 zna chłopców $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 dziewczyna 5 zna chłopców $\{3, 5\}$
 dziewczyna 6 zna chłopców $\{2, 4, 6, 7\}$

[O]

2. (Alternatywny dowód twierdzenia Halla: nie stosować tego twierdzenia w rozwiązaniu!) Niech $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ będzie rodziną zbiorów mającą własność typu Halla

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$$

dla każdego $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Niech $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$ będzie rodziną minimalnych podzbiorów zbiorów $A_1, \dots, A_n$ mających tę samą własność; tj. $B_1 \subseteq A_1, \dots, B_n \subseteq A_n$,

$$\left| \bigcup_{i \in I} B_i \right| \geq |I|$$

dla każdego $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, ale usunięcie dowolnego elementu z któregośkolwiek zbioru B_i powoduje niezachodzenie własności typu Halla.

- (i) Pokazać, że każdy B_i zawiera dokładnie jeden element. [W]
- (ii) Wywnioskować, że rodzina $\mathcal{A}$ ma transwersalę.
3. Rozważmy zbiór złożony z n dziewcząt i m chłopców, spełniających własność, że każdy podzbiór dziewcząt (powiedzmy r spośród nich) zna co najmniej r chłopców. Dodatkowo niech C będzie chłopcem, który zna co najmniej jedną z dziewcząt. Stosując jedną lub wszystkie z przedstawionych metod, pokazać, że można znaleźć dziewczętom mężów, przy czym chłopiec C jest jednym z nich.
- (i) Dostosować dowód twierdzenia Halla w wersji małżeńskiej oparty na „przyjęciu”. [W]

- (ii) Zaprosić $m - n$ nowych dziewcząt, z których każda zna wszystkich chłopców z wyjątkiem C i do tej nowej sytuacji zastosować twierdzenie Halla. [W]
- (iii) Zastosować ostatnie twierdzenie tego rozdziału, przyjmując $P = \{C\}$. [W]

4. Pokazać, że w dowolnej grupie złożonej z n dziewcząt i m chłopców istnieje k dziewcząt, którym można znaleźć mężów wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny podzbiór spośród n dziewcząt (powiedzmy r spośród nich) zna co najmniej $k + r - n$ chłopców. [W]
5. Rozważmy układ dziewcząt i chłopców, w którym każdy podzbiór dziewcząt zna co najmniej tylu chłopców, ile jest dziewcząt w podzbiorze. Załóżmy ponadto, że wszystkich dziewcząt jest n i że każda z nich zna co najmniej m ($\leq n$) chłopców. Pokazać, że n par małżeńskich może być dobranych na co najmniej $m!$ sposobów. [W]
6. Udowodnić macierzową postać twierdzenia Halla, przedstawioną jako wniosek na stronie 41. [W]
7. Niech $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ będzie rodziną zbiorów, w której każdy z nich zawiera co najmniej d elementów (gdzie $d > 0$) i w której żaden element nie występuje w więcej niż d spośród zbiorów $A_1, \dots, A_n$. Pokazać, że $\mathcal{A}$ ma transwersalę. [W]
8. Niech G będzie grafem dwudzielnym (V_1, E, V_2) , w którym każdy wierzchołek w V_1 ma stopień co najmniej d (> 0), a każdy wierzchołek w V_2 ma stopień co najwyżej d . Pokazać, że G zawiera skojarzenie z V_1 do V_2 . Wywnioskować, że jeżeli każdy wierzchołek w G ma stopień d , to zbiór krawędzi E może być wyrażony przez sumę d rozłącznych skojarzeń z V_1 do V_2 .
9. Niech M będzie zero-jedynkową macierzą wymiaru $m \times n$, w której każdy wiersz zawiera co najmniej d jedynek (gdzie $d > 0$), a żadna kolumna nie zawiera więcej niż d jedynek. Pokazać, że istnieje m jedynek, po jednej w każdym wierszu macierzy M , z których żadne dwie nie należą do tej samej kolumny.
- Macierz permutacyjna* jest to kwadratowa zero-jedynkowa macierz z dokładnie jedną jedynką w każdym wierszu i każdej kolumnie. Pokazać, że zero-jedynkowa macierz kwadratowa z dokładnie d jedynkami w każdym wierszu i każdej kolumnie jest sumą d macierzy permutacyjnych.
10. Macierz wymiaru $n \times n$ jest *bistochastyczna*, jeżeli jej elementy są nieujemne oraz suma elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest równa 1. Pokazać, że macierz M wymiaru $n \times n$ jest bistochastyczna wtedy i tylko

wtedy, gdy istnieją macierze permutacyjne $M_1, \dots, M_m$ wymiaru $n \times n$ oraz dodatnie liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dające w sumie 1, takie że

$$M = \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_m M_m \quad [W]$$

11. Zbiór X jest podzielony na n jednakowej mocy zbiorów na dwa sposoby:

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_n = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$$

Pokazać, że istnieją różne elementy $x_1, \dots, x_n$, które należą do różnych zbiorów w obu podziałach. [W]

(Jeżeli czytelnik wie cokolwiek o lewostronnych i prawostronnych warstwach grupy, być może potrafi zilustrować zastosowanie tego rezultatu w teorii grup).

4

Trzy podstawowe zasady

Rozdział ten jest ilustracją trzech prostych zasad, które wielokrotnie będziemy stosować w następnych częściach tej książki.

Zasada szufladkowa

Zasada szufladkowa stwierdza „oczywisty” fakt, że jeżeli rozłoży się więcej niż n obiektów w n szufladkach, to co najmniej jedna szufladka będzie zawierać więcej niż jeden obiekt. Następujące przykłady ilustrują kilka spośród wielu zastosowań tej zasady.

Przykład: Mając danych dowolnych dziesięć różnych dodatnich liczb, mniejszych od 107, pokazać, że będą istniały dwa rozłączne podzbiory tych liczb, których elementy dają taką samą sumę.

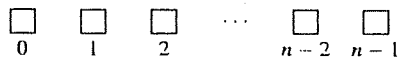
Rozwiązanie: Największe liczby byłyby 97, 98, ..., 106. Dają one w sumie 1015. Rozważmy więc pewne szufladki, które są ponumerowane od 0 do 1015.

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \square & \dots & \square & \square \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & 1014 & 1015 \end{array}$$

Teraz, mając danych dowolnych dziesięć dodatnich liczb całkowitych, mniejszych od 107, weźmy pod uwagę wszystkie ich podzbiory (jest ich $2^{10} = 1024$). Wyobraźmy sobie, że każdy podzbiór jest zapisany na kartce papieru i że kartka ta zostaje umieszczona w szufladce odpowiadającej sumie elementów tego podzbioru. Wówczas 1024 kartki są umieszczone w 1016 szufladkach i, na mocy zasady szufladkowej, jakaś szufladka będzie zawierała więcej niż jedną kartkę. Oznacza to, że elementy dwóch podzbiorów zadanych dziesięciu liczb całkowitych będą dawały tę samą sumę. Podzbiory te nie muszą być rozłączne, ale możemy, oczywiście, usunąć z obu wspólne elementy, otrzymując dwa rozłączne podzbiory z taką samą sumą elementów. Alternatywnie, jeżeli będziemy przeglądać wszystkie szufladki w kolejności od 0 w górę, to *pierwsza* szufladka z więcej niż jedną kartką będzie zawierać dwa *rozłączne* podzbiory z taką samą sumą. $\square$

Przykład: Pewna grupa Arabów wita się, podając sobie ręce. Nikt nie wita się z samym sobą i żadna para osób nie wita się więcej niż jeden raz. Pokazać, że w grupie muszą być dwie osoby, które ścisnęły taką samą liczbę dłoni.

Rozwiązanie: Niech będzie n Arabów i niech ma miejsce jakieś powitanie. Wówczas każda osoba uściśnie od 0 do $n - 1$ dłoni. Weźmy szufladki oznaczone liczbami od 0 do $n - 1$ i niech każda osoba, po napisaniu na kartce papieru swojego nazwiska, umieści ją w szufladce odpowiadającej liczbie wykonanych przez nią uścisków.

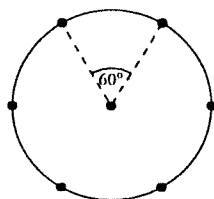
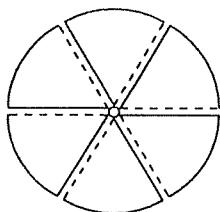


Aby pokazać, że dwie osoby ścisnęły taką samą liczbę dłoni, wykażemy, że jedna z szufladek zawiera więcej niż jedną kartkę. Jest n kartek wpadających do n szufladek, a więc stosując tylko zasadę szufladkową, nie możemy być pewni, że tak się stanie. Wszystko byłoby w porządku, chyba że do każdej szufladki wpadnie dokładnie jedna kartka. Lecz gdyby tak było, to kartka Szejkę Znienawidzonego byłaby w szufladce oznakowanej przez 0, a Szejkę Uwielbianego w szufladce oznakowanej przez $n - 1$. Oznacza to, że Znienawidzony nie przywitał się z żadnym innym szejkiem, a Uwielbiany podał rękę każdemu (łącznie z Znienawidzonym), co jest oczywiście niemożliwe.

Wynik ten w prosty sposób przetłumaczyć można na język teoriografowy, stwierdzając, że w każdym grafie istnieją dwa wierzchołki o tym samym stopniu. Rzeczywiście, jeżeli potraktujemy wierzchołki grafu jako osoby, przy czym dwa wierzchołki są połączone, jeżeli odpowiadające im osoby podały sobie ręce, to liczba uścisków dłoni danej osoby jest, po prostu, stopniem tego wierzchołka.

Przykład: Pokazać, że jeżeli na tarczy kołowej o promieniu 1 umieścimy siedem punktów w ten sposób, że żadne dwa nie są odległe od siebie o mniej niż jeden, to jeden z punktów będzie w środku tarczy, a pozostałych sześć będzie tworzyć na obwodzie tarczy sześciokąt.

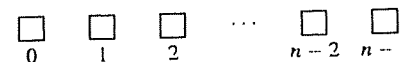
Rozwiązanie: Podzielimy tarczę na siedem części, tak jak to pokazano. Jeżeli siedem punktów jest umieszczonych na tarczy w ten sposób, że żadne dwa punkty nie są w odległości mniejszej niż 1, to wówczas żadne dwa punkty nie mogą być w jednej części. W ten sposób, w każdej części będzie znajdował się jeden punkt. Oznacza to, że jeden punkt będzie w środku, a pozostałe na obwodzie. Każda sąsiednia para punktów leżących na obwodzie musi tworzyć łuk pod kątem 60° lub więcej, a ponieważ tych sześć kątów musi dać w sumie 360° , wynika stąd, że każdy z nich wynosi dokładnie 60° .



□

Przykład: Pokazać, że dla dowolnych n dodatnich liczb całkowitych istnieje podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n .

Rozwiązanie: Niech $a_1, \dots, a_n$ będą dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Rozważmy n szufladek



Umieścimy w szufladkach n podzbiorów $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ze względu na resztę z dzielenia sumy elementów podzbioru przez n . Jeżeli którykolwiek z tych podzbiorów będzie w szufladce 0, to suma elementów tego zbioru dzieli się przez n . Jeżeli jednak taka sytuacja nie zachodzi, wtedy n zbiorów będzie rozmieszczonych w pozostałych $n - 1$ szufladkach. W ten sposób, na mocy zasady szufladkowej, dwa z nich, powiedzmy $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ i $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, będą w tej samej szufladce. Ponieważ $a_1 + a_2 + \dots + a_r$ i $a_1 + a_2 + \dots + a_s$ dają tę samą resztę z dzielenia przez n , wynika stąd, że (gdy powiedzmy $r < s$) ich różnica $a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_s$ jest podzielna przez n . □

Przykład: Udowodnić, że w dowolnym ciągu zawierającym więcej niż $(r - 1)(g - 1)$ różnych liczb, istnieje rosnący podciąg, złożony z r wyrazów, lub malejący podciąg, złożony z g wyrazów (lub oba). (Na przykład każdy ciąg złożony z więcej niż sześciu liczb będzie zawierał rosnący podciąg, złożony z czterech wyrazów, lub malejący podciąg, złożony z trzech wyrazów, np: ciąg 5, 1, 6, 3, 2, 7, 4 zawiera malejący podciąg, złożony z trzech wyrazów, wyróżnionych pismem półgrubym).

Rozwiązanie: Mając zadany ciąg $a_1, \dots, a_n$ przyporządkujmy każdemu wyrazowi a_j dwa „wyniki”, i_j oraz d_j , określone w następujący sposób:

i_j = liczba wyrazów w najdłuższym rosnącym podciągu kończącym się w a_j ;

d_j = liczba wyrazów w najdłuższym malejącym podciągu zaczynającym się w a_j .

Tak więc, na przykład, ciąg 5, 1, 6, 3, 2, 7, 4 miałby wyniki

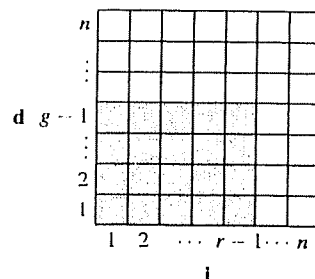
a_j	5	1	6	3	2	7	4
i_j	1	1	2	2	2	3	3
d_j	3	1	3	2	1	2	1

W ogólnym przypadku żadne dwa wyrazy nie będą miały tej samej pary wyników. Rzeczywiście, jeżeli mamy

$$\dots a_j \dots a_k \dots$$

to albo $a_j < a_k$ i najdłuższy rosnący podciąg kończący się w a_j może być rozszerzony przez dodanie a_k (tak, że $i_j < i_k$), albo $a_j > a_k$ i najdłuższy malejący podciąg zaczynający się w a_k może być poprzedzony przez a_j (tak, że $d_j > d_k$).

Utwórzmy teraz kratę złożoną z n^2 szufladek



Ponieważ każde i_j oraz d_j jest pomiędzy 1 a n , to każdy wyraz ciągu może być umieszczony w szufladce odpowiadającej jego dwóm wynikom. Co więcej, ponieważ żadna para nie powtarza się, zatem w każdej szufladce będzie co najwyżej jeden wyraz. W szczególności, jeżeli $n > (r-1)(g-1)$, to wyrazy nie zmieszczą się do $(r-1)(g-1)$ szufladek zacięniowanych na powyższym rysunku. Czyli któryś wyraz a_j będzie miał $i_j \geq r$ lub $d_j \geq g$; tj. j -ty wyraz będzie albo ostatnim wyrazem pewnego rosnącego podciągu o co najmniej r wyrazach, albo pierwszym wyrazem jakiegoś malejącego podciągu o co najmniej g wyrazach. $\square$

Być może nie jest czytelnikowi obca nieskończona wersja tego wyniku, mianowicie, że każdy nieskończony ciąg liczb rzeczywistych zawiera nieskończony podciąg rosnący lub nieskończony podciąg malejący. Istnieje zabawny dowód tego faktu (zwany „hiszpańskim hotelem”), który można znaleźć na przykład w książce *Yet another introduction to analysis*, cytowanej w spisie literatury.

Zasada dwoistości

Nie istnieje żadna ściśle określona zasada dwoistości, którą można by jasno sformułować. Ogólnie mówiąc, zasada ta jest stosowana do wykluczania pewnych sytuacji dzięki swoistego rodzaju przeciwstawnościom (takich jak nieparzysty/parzysty czy czarny/biały).

Przykład: Pokazać, że w każdym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że z lematu o uściskach dłoni (zadanie 2 na stronie 33), dla dowolnego grafu $G = (V, E)$

$$\sum_{v \in V} \delta v = 2|E|$$

co jest parzyste. Tak więc

$$\sum_{\substack{v \in V \\ \delta v \text{ nieparzyste}}} \delta v + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ \delta v \text{ parzyste}}} \delta v}_{\text{parzyste}} = \underbrace{2|E|}_{\text{parzyste}}$$

Stąd wynika, że suma stopni nieparzystych jest parzysta, czyli musi ich być parzysta liczba. Jest to przykład użycia przeciwstawności w zliczaniu nieparzysty/parzysty. $\square$

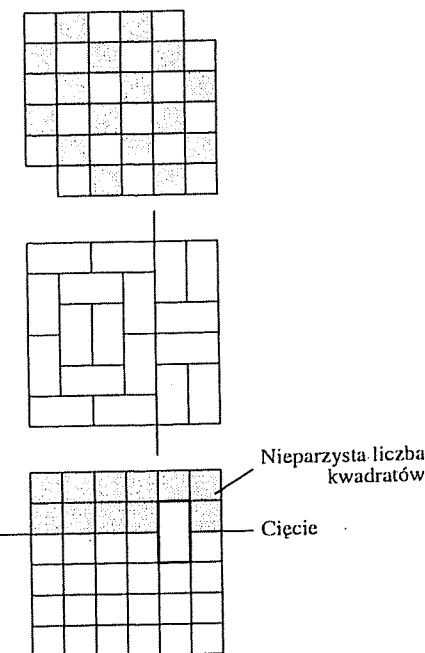
Przykład: Rozważmy tablicę wymiaru $n \times n$ (np. szachownicę) i pewną liczbę kostek domina, z których każda będzie pokrywała dwa przyległe kwadraty tablicy. Pokazać, że tablica może być pokryta nie nakładającymi się kostkami domina wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste. Pokazać również, że tablica z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożnikami nigdy nie może być pokryta nie nakładającymi się kostkami domina.

Następnie rozważyć dowolne pokrycie tablicy wymiaru 6×6 za pomocą 18 kostek domina. Pokazać, że dla każdego takiego rozłożenia kostek domina zawsze jest możliwe przecięcie tablicy na dwie prostokątne części tak, że linia cięcia nie przechodzi przez żadną kostkę domina.

Rozwiązanie: Łatwo jest pokryć kostkami domina tablicę mającą boki o parzystej liczbie kwadratów i sporządzenie takiego układu pozostawiamy czytelnikowi. Jednakże, jeżeli n jest nieparzyste, to żądana liczba $\frac{1}{2}n^2$ kostek domina nie jest liczbą całkowitą!

W przypadku tablicy z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożnikami mamy do czynienia z problemem, przypominającym starodawną łamigłówkę dotyczącą szachownicy. Jeżeli n jest nieparzyste, to potrzebna do pokrycia liczba kostek domina nie jest znowu liczbą całkowitą. W przypadku gdy n jest parzyste, wyobraźmy sobie pokratkowaną tablicę, tak

jak ta przedstawiona na rysunku. Wówczas dwa usunięte narożniki są tego samego koloru, a więc pozostała część tablicy ma różną liczbę białych i czarnych kwadratów. Ponieważ każda kostka domina pokrywa dokładnie jeden biały i jeden czarny kwadrat, pokrycie ponownie nie jest możliwe. Zauważmy, że w tych

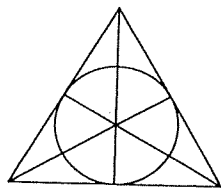


uzasadnieniach zastosowaliśmy dwa testy dwoistości; nieparzysty/parzysty oraz czarny/biały.

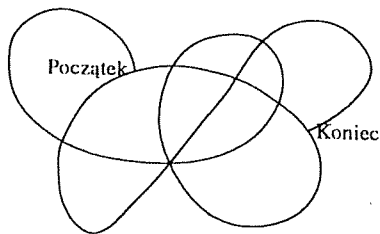
Rozważmy teraz pokrycie tablicy wymiaru 6×6 za pomocą 18 kostek domina. Środkowy rysunek pokazuje jedno z takich pokryć i wskazuje linię, która rozciąga tablicę na dwa prostokąty bez przecinania kostki domina. W ogólności jest pięć linii w każdym kierunku, które trzeba rozważyć jako potencjalne rozcięcia, i każda kostka domina leży na dokładnie jednej linii cięcia. Nieparzysty/parzysty test dwoistości pokaże za chwilę, że w żadnym z takich układów nie ma sytuacji, iż którekolwiek z tych dziesięciu cięć przechodzi przez dokładnie jedną kostkę domina (lub, w rzeczywistości, przez dowolną nieparzystą liczbę kostek). Gdyby tak było, to jak pokazuje dolny rysunek, dałoby to nieparzystą liczbę kwadratów pokrytych przez kostki domina. Jak więc 18 kostek domina można rozdzielić pomiędzy 10 linii cięcia? Jedna z linii cięcia nie może przechodzić przez żadną kostkę domina, co było do pokazania. $\square$

Warto zauważyć, że test dwoistości może być zastosowany tylko do odrzucenia pewnych możliwości. Właśnie widzieliśmy, że proste nieparzyste/parzyste zliczenie wyklucza możliwość pokrycia za pomocą kostek domina kwadratowej tablicy, mającej po bokach nieparzystą liczbę kwadratów. Jednakże, aby pokazać, że tablica mająca po bokach parzystą liczbę kwadratów *może* być pokryta kostkami, trzeba przedstawić pewnego rodzaju konstrukcję lub dowód. Taka sytuacja będzie występowała w kombinatoryce wielokrotnie: prosty test dwoistości pozwoli nam stwierdzić, kiedy jakiś układ jest niemożliwy. Jednak udowodnienie, że jest to możliwe we wszystkich pozostałych przypadkach, wymaga czasami skomplikowanego dowodu.

Przykład: Pokazać, że następująca figura nie może być narysowana za pomocą jednej ciągłej linii bez przechodzenia przez jakiś odcinek krzywej więcej niż jeden raz:



Rozwiązanie: Wyobraźmy sobie dowolną figurę, narysowaną za pomocą ciągłej linii bez przechodzenia przez którykolwiek odcinek krzywej więcej niż jeden raz: jedna z takich figur została pokazana na rysunku. Rozważmy dowolny punkt, różny od punktów początkowego i końcowego, w którym linia przecina się sama z sobą. Jeżeli linia przeszła przez ten punkt r razy,



to będzie $2r$ odcinków krzywej, prowadzących do lub wychodzących z tego punktu. Tak więc w każdej figurze, która może być w ten sposób narysowana, będą najwyżej dwa punkty (mianowicie punkt początkowy i punkt końcowy) z nieparzystą liczbą odcinków dochodzących do nich. W figurze rozważanej w tym przykładzie jest więcej niż dwa „nieparzyste skrzyżowania”, a więc nie może ona być narysowana w opisany sposób. $\square$

Ta prosta obserwacja nacechowana dwoistością ma o wiele bardziej skomplikowaną odwrotność, mianowicie każda spójna figura z dwoma lub mniej „nieparzystymi skrzyżowaniami” *może* być narysowana bez odrywania ołówka od papieru i bez dwukrotnego przechodzenia przez jakikolwiek odcinek krzywej. Problem ten będziemy rozważać w teoriografowej terminologii w rozdziale 6.

Przykład: Pokazać, że w grafie dwudzielnym każdy cykl składa się z parzystej liczby krawędzi.

Rozwiązanie: Niech $G = (V_1, E, V_2)$ będzie grafem dwudzielnym (w którym zbiór wierzchołków jest podzielony na V_1 i V_2 , a każda krawędź łączy element należący do V_1 z elementem należącym do V_2). Rozważmy w grafie G cykl

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1$$

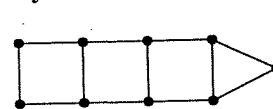
Założmy na przykład, że $v_1 \in V_1$. Wówczas istnienie krawędzi $v_1 v_2$ zapewnia, że $v_2 \in V_2$; podobnie $v_3 \in V_1$ itd. Tak więc mamy

$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{n-1} & v_n & v_1 \\ \in V_1 & \in V_2 & \in V_1 & & \in V_1 & \in V_2 & \in V_1 \end{array}$$

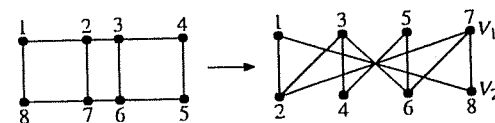
co oczywiście implikuje, że n jest parzyste. $\square$

I tym razem odwrotność tego wyniku okazuje się być prawdziwa, mianowicie, jeżeli graf nie zawiera cykli o nieparzystej liczbie krawędzi, to musi być dwudzielnym. Jednakże dowód jest bardziej skomplikowany, jak to zobaczymy, po zilustrowaniu tego rezultatu pewnymi przykładami.

Przykład:



Ten graf zawiera nieparzysty cykl: powyższy rezultat stwierdza, że nie jest on dwudzielnym



Tutaj nie ma cykli nieparzystych: graf ten jest dwudzielnym

Twierdzenie: Graf jest dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli mających nieparzystą liczbę krawędzi.

Dowód: ($\Rightarrow$) Jeżeli graf jest dwudzielnym, to, jak zaobserwowaliśmy powyżej, nie może mieć „nieparzystych” cykli.

($\Leftarrow$) Załóżmy teraz, że graf $G = (V, E)$ nie zawiera nieparzystych cykli. Załóżmy także, że G jest spójny (bo gdyby nie był, to moglibyśmy zastosować ten dowód do każdej z jego składowych, a jeżeli każda składowa jest dwudzielna, to również cały graf jest dwudzielny). Niech $v_0 \in V$ i zdefiniujmy $V_1, V_2 \subseteq V$ w następujący sposób:

$$V_1 = \{v \in V: \text{istnieje szlak w } G \text{ od } v_0 \text{ do } v, \\ \text{który ma parzystą liczbę krawędzi}\}$$

$$V_2 = \{v \in V: \text{istnieje szlak w } G \text{ od } v_0 \text{ do } v, \\ \text{który ma nieparzystą liczbę krawędzi}\}$$

Ponieważ G jest spójny, to jest jasne, że $V = V_1 \cup V_2$, ale czy możemy być pewni, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i że każda krawędź łączy wierzchołek należący do V_1 z wierzchołkiem należącym do V_2 ?

Aby pokazać, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, założymy, że $v \in V_1 \cap V_2$, i doprowadzimy do sprzeczności. Ponieważ $v \in V_1$, zatem musi istnieć szlak od v_0 do v , który ma krawędzie ze zbioru, powiedzmy, E_1 , gdzie $|E_1|$ jest parzyste. Podobnie, ponieważ $v \in V_2$, zatem musi istnieć szlak od v_0 do v , który ma krawędzie ze zbioru, powiedzmy, E_2 , gdzie $|E_2|$ jest nieparzyste. Niech E^* będzie „różnicą symetryczną” zbiorów E_1 i E_2 ; tj.

$$E^* = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$$

i niech G^* będzie grafem (V, E^*) . Po chwili zastanowienia dojdziemy do wniosku, że stopień dowolnego wierzchołka w G^* jest równy sumie jego stopni w (V, E_1) i (V, E_2) , pomniejszonej o podwojony stopień w $(V, E_1 \cap E_2)$, oraz że jest on zawsze parzysty. Tak więc, na mocy wyniku zadania 3 na stronie 33 w G^* (a tym samym w G) istnieje zbiór cykli, które nie mają wspólnych krawędzi i które między sobą wyczerpują wszystkie krawędzie z E^* . Ponieważ, na mocy założenia, każdy taki cykl jest parzysty, zatem $|E^*|$ też jest liczbą parzystą.

Chcemy teraz wyznaczyć liczbę krawędzi w E^* . Jeżeli dodamy po prostu liczbę elementów w E_1 do liczby elementów w E_2 , to każdy element w $E_1 \cap E_2$ będzie policzony dwukrotnie, podczas gdy nie powinno się było policzyć ich wcale. Tak więc jest jasne, że

$$\begin{array}{cccc} |E^*| & = & |E_1| & + & |E_2| & - & 2|E_1 \cap E_2| \\ \text{parzyste} & & \text{parzyste} & & \text{nieparzyste} & & \text{parzyste} \end{array}$$

i doszliśmy do sprzeczności. Wynika stąd, że $V_1 \cap V_2$ jest zbiorem pustym, tak jak twierdziliśmy.

Na koniec nie trudno zauważyć, że każda krawędź grafu G łączy wierzchołek należący do V_1 z wierzchołkiem należącym do V_2 . Rzeczywiście, jeżeli $v_1 \in V_1$ i $v_1 v_2 \in E$, to istnieje szlak P od v_0 do v_1 , mający najniższą z możliwych parzystą liczbę krawędzi i nie jest trudno zauważyć, że istnieje wówczas „nieparzysty” szlak od v_0 do v_2 . Jeżeli bowiem P nie kończy się krawędzią $v_2 v_1$, to szlak składający się z P oraz krawędzi $v_1 v_2$ jest nieparzystym szlakiem od v_0 do v_2 . Na odwrót, jeżeli szlak P kończy się krawędzią $v_2 v_1$, to P z usuniętą krawędzią $v_2 v_1$ daje

nieparzysty szlak z v_0 do v_2 . W obu przypadkach istnienie nieparzystego szlaku z v_0 do v_2 pokazuje, że $v_2 \in V_2$, a stąd wynika, iż G jest grafem dwudzielnym (V_1, E, V_2) . $\square$

Zasada włączania/wyłączania

Widzieliśmy już (tak jak w ostatnim dowodzie), że, aby policzyć elementy zbioru $X \cup Y$, musimy dodać te z X do tych z Y , a następnie odjąć te, które były policzone dwukrotnie, mianowicie te, które są w obu zbiorach X i Y ; tj.

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

„Zasada włączania/wyłączania” uogólnia tę ideę i może być ona sformułowana w terminologii zbiorów lub, co jest bardziej dogodne dla nas, w terminologii obiektów mających ustalone własności.

Przykład: W pewnym klubie jest 10 osób grających w tenisa i 15 grających w squasha: 6 spośród nich gra w obie gry. Ile osób uprawia co najmniej jedną dyscyplinę?

Rozwiązanie: Tak jak w teoriomnogościowym wyniku przedstawionym powyżej, żądana liczba w tym przypadku wynosi $10 + 15 - 6 = 19$. $\square$

Przykład: W pewnym klubie jest 10 osób grających w tenisa, 15 grających w squasha i 12 grających w badmintonie. Spośród nich 5 gra w tenisa i squasha, 4 gra w tenisa i badmintonie, 3 gra w squasha i badmintonie, a tylko 2 osoby grają we wszystkie trzy gry. Ile osób uprawia co najmniej jedną dyscyplinę?

Rozwiązanie: Zaczynamy od dodania 10, 15 i 12. Jednakże te osoby, które uprawiają dwie dyscypliny będą policzone dwukrotnie. Musimy więc „wykluczyć” 5, 4 i 3, otrzymując

$$10 + 15 + 12 - 5 - 4 - 3$$

Ale wówczas gracze uprawiający trzy dyscypliny będą „włączeni” trzykrotnie w wyrażeniu $10 + 15 + 12$, a następnie „wyłączeni” trzykrotnie w wyrażeniu $-5 - 4 - 3$, a więc nie będą wcale policzeni. Musimy zatem ponownie doliczyć wszystkie te osoby, otrzymując

$$10 + 15 + 12 - 5 - 4 - 3 + 2 = 27$$

osób uprawiających co najmniej jedną dyscyplinę. $\square$

W powyższych przykładach mieliśmy możność zaobserwować praktyczne zastosowanie zasady włączania/wyłączania. Przejdziemy teraz do ogólnego sformułowania tej zasady.

Twierdzenie: (Zasada włączania/wyłączania) Dla danego skończonego zbioru obiektów, które mogą, ale nie muszą mieć jakiejkolwiek własności $1, 2, \dots, n$, niech $N(i_1, \dots, i_r)$ będzie liczbą obiektów mających co najmniej r własności

$i_1, \dots, i_r$. Wówczas liczba obiektów w zadanym zbiorze mających co najmniej jedną z własności wynosi

$$\begin{aligned} & N(1) + N(2) + \dots + N(n) \\ & - N(1, 2) - N(1, 3) - \dots - N(n-1, n) \\ & + N(1, 2, 3) + N(1, 2, 4) + \dots + N(n-2, n-1, n) \\ & - \dots \\ & \vdots \\ & + (-1)^{n-1} N(1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Dowód: Jest jasne, że jeżeli jakiś obiekt ze zbioru nie ma żadnej z własności, to nie będzie wnosił do ogólnej sumy przedstawionej w twierdzeniu. Pokażemy teraz, że każdy obiekt ze zbioru, który ma co najmniej jedną z własności, wnosi jedynek do tej sumy: wyniknie z tego wówczas, że równa się ona liczbie takich obiektów. Weźmy więc pod uwagę obiekt mający co najmniej jedną z własności. Załóżmy, że obiekt ten spełnia dokładnie r spośród rozważanych własności. (Jeżeli chcemy być bardziej precyzyjni, możemy założyć, że ma on dokładnie własności $1, 2, \dots, r$.) Ile wówczas wnosi ten obiekt do następującej sumy ogólnej?

$$\begin{array}{ll} N(1) + N(2) + \dots + N(n) & \text{rząd 1} \\ -N(1, 2) - N(1, 3) - \dots - N(n-1, n) & \text{rząd 2} \\ +N(1, 2, 3) + N(1, 2, 4) + \dots + N(n-2, n-1, n) & \text{rząd 3} \\ - \dots & \\ \vdots & \\ +(-1)^{r-1} N(1, 2, \dots, r) + (-1)^{r-1} N(1, 2, \dots, r-1, r+1) + \dots & \text{rząd } r \\ \vdots & \\ +(-1)^{n-1} N(1, 2, \dots, n) & \text{rząd } n \end{array}$$

W rzędzie 1 obiekt ten wnosi $+1$ r razy, w rzędzie 2 wnosi on -1 $\binom{r}{2}$ razy, w rzędzie 3 wnosi on $+1$ $\binom{r}{3}$ razy, ... i w rzędzie r wnosi on raz $\binom{r}{r} = 1$ $(-1)^{r-1}$: dalej nie wnosi nic więcej. W ten sposób jego ogólny wkład wynosi

$$\begin{aligned} & \binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} = \\ & = 1 - \left[\binom{r}{0} + \binom{r}{1}(-1) + \binom{r}{2}(-1)^2 + \dots + \binom{r}{r}(-1)^r \right] = 1 \end{aligned}$$

* Rozwinięcie dwumianowe wyrażenia $[1 + (-1)]^r$, które oczywiście ma wartość zero

Wynika stąd, że obiekt mający co najmniej jedną z własności rzeczywiście wnosi dokładnie jedynek do zadanej ogólnej sumy i zasada włączania/wyłączania jest udowodniona. $\square$

Przykład: Ile liczb od 2 do 1000 jest kwadratami, sześciątami lub innymi większymi potęgami pewnych liczb całkowitych?

Rozwiązanie: Rozważmy zbiór obiektów $\{2, \dots, 1000\}$ i niech element tego zbioru ma „własność i ”, jeżeli jest on równy i -tej potęgę pewnej liczby całkowitej. Ponieważ $2^{10} > 1000$, więc nie ma w tym zbiorze dziesiątych potęg i jedyne własności, które naprawdę dotyczą tego przykładu, są własności $2, 3, \dots, 9$. W takim razie, stosując notację z twierdzenia, liczba obiektów mających co najmniej jedną z tych własności wynosi

$$\begin{aligned} & N(2) + N(3) + \dots + N(9) \\ & - N(2, 3) - N(2, 4) - \dots - N(8, 9) \\ & + N(2, 3, 4) + N(2, 3, 5) + \dots + N(7, 8, 9) \\ & - \dots \\ & \vdots \\ & - N(2, 3, \dots, 9) \end{aligned}$$

Każdą z tych wielkości można łatwo policzyć. Na przykład

$$\begin{aligned} N(2) &= \lfloor \sqrt[2]{1000} \rfloor - 1 = 30 & N(3) &= \lfloor \sqrt[3]{1000} \rfloor - 1 = 9 \quad \dots \\ N(2, 3) &= N(6) = \lfloor \sqrt[6]{1000} \rfloor - 1 = 2 & N(2, 4) &= N(4) = 4 \quad \dots \\ N(2, 3, 4) &= N(12) = 0 & N(2, 3, 6) &= N(6) = 2 \quad \dots \end{aligned}$$

(gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza „część całkowitą” liczby x). Kontynuując w taki sam sposób, wnioskujemy, że liczba obiektów mających co najmniej jedną z zadanych własności jest równa

$$30 + 9 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 - 2 - 4 - 2 - 1 - 2 - 1 - 1 + 2 + 1 = 40 \quad \square$$

Przykład: (Funkcja Eulera) Niech m będzie dodatnią liczbą całkowitą, której różnymi czynnikami pierwszymi są $p_1, \dots, p_n$. Pokazać, że ilość liczb całkowitych pomiędzy 1 a m , które są względnie pierwsze z m (tj. nie mających wspólnego dzielnika z m większego niż 1) równa się

$$m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

(Wyrażenie to jest zwykle oznaczane $\phi(m)$ i w teorii liczb definiuje ono *funkcję Eulera*).

Rozwiązanie: Niech rozważanym zbiorem obiektów będzie $\{1, 2, \dots, m\}$ i niech dla $1 \leq i \leq n$ „własność i ” oznacza, że liczba jest podzielna przez p_i . Wówczas w zbiorze tym liczbami całkowitymi, względnie pierwszymi z m , są dokładnie te,

które nie mają żadnej z własności $1, \dots, n$. Musimy więc od m odjąć ilość liczb całkowitych, mających co najmniej jedną z własności, otrzymując (przy użyciu typowej notacji)

$$\begin{aligned} & m \\ & -N(1) - N(2) - \dots - N(n) \\ & +N(1,2) + N(1,3) + \dots + N(n-1,n) \\ & -N(1,2,3) - N(1,2,4) - \dots - N(n-2,n-1,n) \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & +(-1)^n N(1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

Tutaj $N(i)$ jest ilością liczb całkowitych w $\{1, \dots, m\}$, które są podzielne przez p_i . Wynosi ona dokładnie m/p_i . Podobnie $N(i,j) = m/p_i p_j$ itd. Stąd żądana ilość liczb całkowitych względnie pierwszych z m jest dana wyrażeniem

$$\begin{aligned} & m \\ & -\frac{m}{p_1} - \frac{m}{p_2} - \dots \\ & +\frac{m}{p_1 p_2} + \frac{m}{p_1 p_3} + \dots \\ & -\frac{m}{p_1 p_2 p_3} - \frac{m}{p_1 p_2 p_4} - \dots \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & +(-1)^n \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_n} \end{aligned}$$

Można bezpośrednio sprawdzić, iż zgadza się to z podaną postacią iloczynową funkcji $\phi(m)$. $\square$

Przykład: Ile permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ ma własność, że $1 \nrightarrow 1, 2 \nrightarrow 2, \dots, i \nrightarrow i$? Taka permutacja, w której nie ma „zgodności” na żadnym miejscu, jest nazywana *nieporządkiem* zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Rozwiązanie: Niech rozważanym zbiorem obiektów będą wszystkie $n!$ permutacje zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Dla dowolnej permutacji niech „własność i ” oznacza, że $i \rightarrow i$, gdzie $1 \leq i \leq n$. Wówczas liczba nieporządków zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest liczbą permutacji nie posiadających żadnej z tych własności. Na mocy zasady włączania/wyłączania jest ona dana wyrażeniem

$$\begin{aligned} & n! \\ & -N(1) - N(2) - \dots - N(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & +N(1,2) + N(1,3) + \dots + N(n-1,n) \\ & -N(1,2,3) - N(1,2,4) - \dots - N(n-2,n-1,n) \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & +(-1)^n N(1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

Ale, dla przykładu, $N(1,2,\dots,r)$ jest liczbą tych permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$, w których $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, \dots, r \rightarrow r$, a pozostałe $n-r$ elementy są dowolnie permutowane: stąd liczba ta wynosi $(n-r)!$. To samo jest prawdą dla każdego układu r własności spośród n i w konsekwencji powyższe wyrażenie określające liczbę nieporządków przyjmuje postać

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}1! + (-1)^n \binom{n}{n}0!$$

Proste zastosowanie silniowej postaci współczynników dwumianowych redukuje to wyrażenie do

$$n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad \square$$

Zasadę włączania/wyłączania będziemy ponownie stosować w dalszych rozdziałach, a w szczególności wykorzystamy ją w rozdziale 12, rozważając „wielomiany szachowe”.

ZADANIA

1. Pokazać, że:

- (i) żyją w Londynie dwie osoby, które posiadają taką samą liczbę książek,
- (ii) żyją na świecie dwie osoby mające taką samą liczbę włosów.

2. Załóżmy, że danych jest $n+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$. Pokazać, że:

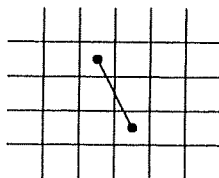
- (i) istnieje para liczb, których suma wynosi $2n+1$, [W]
- (ii) muszą istnieć dwie liczby, które są względnie pierwsze (tj. nie mają wspólnego dzielnika większego od 1), [W]
- (iii) istnieje liczba, która jest wielokrotnością innej liczby. [W]

3. Udowodnić, że wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych będzie istniała para liczb różniących się o wielokrotność n . [W]

4. Niech T będzie trójkątem równobocznym o boku równym 1. Pokazać, że:

- (i) jeżeli w T umieścimy pięć punktów, to odległość między dwoma z nich powinna być mniejsza bądź równa $\frac{1}{2}$, [W]

- (ii) jest niemożliwe pokryć T trzema kołami, z których każde ma średnicę mniejszą niż $1/\sqrt{3}$. [W]
5. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n , któraś z jej wielokrotności musi mieć postać $99 \dots 900 \dots 0$. [W]
6. Każdego dnia wrzucamy do skarbonki albo 1 albo 2 pensy i po n dniach uzbierana liczba pensów wynosi m . Pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej k , gdzie $0 \leq k \leq 2n - m$, będzie okres następujących po sobie dni, podczas których włożyliśmy do skarbonki dokładnie k pensów. [W]
7. Pokazać, że suma kwadratów dwóch nieparzystych liczb całkowitych nie może być kwadratem liczby całkowitej.
8. Z białą-czarnej pokratkowanej tablicy wymiaru $n \times n$ usunięto dwa kwadraty. Pokazać, że pozostała część tablicy może być pokryta nie nakładającymi się kostkami domina wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste i dwa usunięte kwadraty są różnych kolorów. [W]
9. Na tablicy wymiaru $n \times n$ znajduje się n^2 figur szachowych, każda na jednym kwadracie. Chcemy przestawić każdą figurę na przyległy w tym samym rzędzie lub kolumnie kwadrat, w ten sposób, że po przestawieniu wszystkich n^2 figur w dalszym ciągu każda będzie zajmowała jeden kwadrat. Pokazać, że jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste.
10. Mamy $\frac{1}{2}(n^3 - (n-2)^3)$ cegiełek, każda o wymiarach $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ i chcemy złączyć je razem tak, by otrzymać zewnętrzną konstrukcję sześcienu wymiaru $n \times n \times n$ (tj. sześcian o boku $n \text{ cm}$, z wnętrza którego wycięto sześcian o boku $(n-2) \text{ cm}$). Pokazać, że można to zrobić wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste. [W]
11. (i) W grafie cykl Hamiltona jest to cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek grafu. (Będziemy rozważać je szczegółowo w rozdziale 6). Pokazać, że graf dwudzielny $G = (V_1, E, V_2)$, który ma cykl Hamiltona, musi spełniać warunek $|V_1| = |V_2|$. [W]
- (ii) W grze w szachy skoczek może poruszać się w dowolnym kierunku po przekątnej prostokąta wymiaru 2×3 , tak jak pokazano. Mając daną tablicę wymiaru $n \times n$, gdzie $n > 1$ jest nieparzyste, pokazać, że jest niemożliwe, aby skoczek poruszał się po tablicy skacząc na każdy kwadrat jeden raz i powrócił na ten kwadrat, z którego wystartował. [W]
- Pelen zapału czytelnik mógłby zechcieć znaleźć taką trasę w przypadku tradycyjnej szachownicy wymiaru 8×8 . [O]



12. (i) Ile liczb całkowitych od 1 do 10 000 jest podzielnych przez co najmniej jedną z liczb 2, 3 i 5? [O]
- (ii) Ile liczb całkowitych spośród 1 do 10 000 jest podzielnych przez co najmniej jedną z liczb 2, 3, 5 i 7? [O]
- Wywnioskować, że jest co najwyżej 2288 liczb pierwszych, mniejszych od 10 000.
- (Moglibyśmy zredukować tę wartość przez stopniowe wykluczanie wielokrotności najmniejszej pozostającej liczby pierwszej, naśladując słynne *Sito Eratosthena*).
13. W pokerze gracz otrzymuje 5 kart z tradycyjnej talii 52 kart. Stosując każdą z podanych metod, policzyć możliwości otrzymania takiego układu kart, który zawierałby co najmniej jednego asa, co najmniej jednego króla, co najmniej jedną damę i co najmniej jednego waleta:
- (i) zasada włączania/wyłączania;
- (ii) przeliczając różne typy układów, takich jak AAKDW. [O]
14. Napisano n listów i zaadresowano dla nich koperty. Jeżeli listy są wkładane do kopert w sposób losowy, jeden list do jednej koperty, to jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden list nie jest we właściwej kopercie? Pokazać, że prawdopodobieństwo to dąży do $1/e$, gdy n dąży do nieskończoności. [O]
15. (i) Ile jest wszystkich funkcji działających ze zbioru $\{1, \dots, m\}$ do zbioru $\{1, \dots, n\}$? [O]
- (ii) Iniekcja z $\{1, \dots, m\}$ do $\{1, \dots, n\}$ jest to taka funkcja f , że jeżeli $i \neq j$ w $\{1, \dots, m\}$ to $f(i) \neq f(j)$ w $\{1, \dots, n\}$. Ile spośród funkcji działających z $\{1, \dots, m\}$ do $\{1, \dots, n\}$ jest iniekcjami? [O]
- (iii) Suriekcja z $\{1, \dots, m\}$ do $\{1, \dots, n\}$ jest to taka funkcja f , że dla $i \in \{1, \dots, n\}$ istnieje $j \in \{1, \dots, m\}$ takie, że $f(j) = i$. Stosując zasadę włączania/wyłączania pokazać, że liczba suriekcji działających z $\{1, \dots, m\}$ do $\{1, \dots, n\}$ jest dana wzorem

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^m \quad [W]$$

Kwadraty łacińskie

„Kwadrat łaciński” jest to kwadratowa tablica lub macierz, w której każdy wiersz i każda kolumna składa się z tego samego zbioru niepowtarzających się elementów.

Przykład: W dziedzinie algebry abstrakcyjnej tabela mnożenia w skończonej grupie tworzy kwadrat łaciński. Dla przykładu tabela mnożenia w grupie Kleina jest postaci

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Kwadrat łaciński

Przykład: W teorii prawdopodobieństwa „bistochastyczna” macierz, jak na przykład,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(w której każdy wiersz i kolumna sumuje się do 1) jest kwadratem łacińskim. $\square$

Naszą uwagę skupimy zasadniczo na kwadratach i prostokątach łacińskich, których elementami są dodatnie liczby całkowite. *Prostokąt łaciński* wymiaru $p \times q$ (o elementach należących do $\{1, 2, \dots, n\}$) jest to macierz wymiaru $p \times q$ o elementach wybranych ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, w której w żadnym wierszu i kolumnie nie ma powtarzających się elementów. W przypadku gdy $p = q = n$, taki obiekt nazywa się *kwadratem łacińskim*: wówczas każdy wiersz i każda kolumna składa się dokładnie z n liczb $1, 2, \dots$ oraz n .

Przykłady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Prostokąt łaciński wymiaru 2×3
o elementach z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Kwadrat łaciński
wymiaru 3×3

Kwadrat łaciński
wymiaru 4×4

$\square$

W rozdziale tym będziemy rozważać dwa główne pytania dotyczące prostokątów i kwadratów łacińskich: pierwsze z nich to, czy koniecznie prostokąt łaciński musi być częścią kwadratu łacińskiego.

Przykład: Czy prostokąt łaciński

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jest częścią jakiegoś kwadratu łacińskiego wymiaru 4×4 ? Równoważnie, czy można dodać kolejne dwa wiersze, aby uczynić z niego taki kwadrat? Podobnie, czy prostokąt łaciński

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

jest częścią jakiegoś kwadratu łacińskiego wymiaru 5×5 ? Równoważnie, czy można dodać dodatkową kolumnę a następnie dwa dodatkowe wiersze, aby uczynić z niego taki kwadrat?

Rozwiązanie: Łatwo zauważyć, iż pierwszy prostokąt łaciński może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego, jak na przykład

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Faktycznie, jak wkrótce pokażemy, każdy prostokąt łaciński wymiaru $p \times n$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ może być uzupełniony do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$.

Jeżeli chodzi o drugi przykład, to tego prostokąta nie można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego wymiaru 5×5 , gdyż dodatkowa kolumna w takim uzupełnieniu musiałaby zawierać „2” w dwóch miejscach, co przeczyłoby własności bycia łacińskim: w pewnym sensie w zadanym prostokącie element „2” nie występuje wystarczającą liczbę razy. W dalszej części tego rozdziału wyprowadzimy warunki konieczne i dostateczne na liczbę wystąpień elementów w prostokącie łacińskim, gwarantujące jego rozszerzenie do kwadratu łacińskiego. $\square$

Dowodząc wyniki dotyczące rozszerzeń prostokątów łacińskich, będziemy korzystać z transwersalowej postaci twierdzenia Halla z rozdziału 3. Przedstawimy

teraz jeden przykład ukazujący, w jaki sposób dodanie wiersza do prostokąta łacińskiego przekłada się łatwo na zagadnienie systemu różnych reprezentantów.

Przykład: Dodanie dodatkowego wiersza do prostokąta łacińskiego

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

w celu utworzenia prostokąta łacińskiego wymiaru 3×5 o elementach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ jest równoznaczne z wyznaczeniem różnych reprezentantów ze zbiorów pokazanych poniżej (zauważmy, że każdy zbiór jest mocy 3 oraz że każda liczba od 1 do 5 występuje w dokładnie trzech spośród tych zbiorów):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

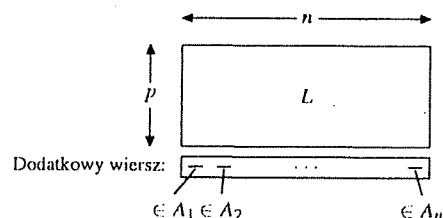
$$\{2, 3, 4\} \quad \{3, 4, 5\} \quad \{1, 3, 5\} \quad \{1, 2, 4\} \quad \{1, 2, 5\}$$

Jeden z takich układów wyróżniono pismem półgrubym. Reprezentanci ci mogliby stanowić elementy następnego wiersza. Moglibyśmy wówczas kontynuować w podobny sposób, rozszerzając otrzymany prostokąt łaciński wymiaru 3×5 do prostokąta łacińskiego wymiaru 4×5 , a ten z kolei do kwadratu łacińskiego wymiaru 5×5 . $\square$

Twierdzenie: Każdy prostokąt łaciński wymiaru $p \times n$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$.

Dowód: Niech L będzie prostokątem łacińskim wymiaru $p \times n$, w którym $p < n$ i niech dla $1 \leq i \leq n$ będą określone zbiory A_i w następujący sposób:

$$A_i = \{\text{te liczby spośród } 1, 2, \dots, n, \text{ które nie występują w } i\text{-tej kolumnie w } L\}$$



Wówczas, jak widzieliśmy w powyższym przykładzie, znalezienie dodatkowego wiersza dla L , w celu rozszerzenia go do prostokąta łacińskiego wymiaru $(p+1) \times n$ (o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$), jest równoznaczne ze znalezieniem systemu różnych reprezentantów dla rodziny $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$. Aby pokazać, że tacy reprezentanci istnieją lub że rodzina ta ma transwersalę, zastosujemy twierdzenie Halla (str. 41) i pokażemy, iż dowolnych r spośród tych zbiorów zawiera w sumie co najmniej r elementów.

Zanim do tego przejdziemy, zauważmy, że (tak jak w poprzednim przykładzie)

$$|A_1| = |A_2| = \dots = |A_n| = n - p$$

gdyż A_i składa się ze wszystkich n liczb, z wyjątkiem tych p , które już występują w i -tej kolumnie. Zauważmy również (ponownie tak jak w przykładzie), że każde j , gdzie $1 \leq j \leq n$, należy do dokładnie $n - p$ zbiorów z $\mathcal{A}$. Rzeczywiście j pojawia się w dokładnie p miejscach w L , a więc występuje w p różnych kolumnach: w konsekwencji element j nie występuje w $n - p$ kolumnach, co implikuje, iż występuje on w rozważanych $n - p$ zbiorach.

Chociaż widzieliśmy już w zadaniu 7 na stronie 45, że taka symetryczna rodzina musi zawierać transwersalę, to jednak udowodnimy ten fakt raz jeszcze, stosując bezpośrednio twierdzenie Halla. Weźmy pod uwagę dowolnych r spośród zbiorów $A_1, \dots, A_n$; musimy pokazać, że tych r zbiorów zawiera w sumie co najmniej r elementów. Wypiszmy więc wszystkie elementy tych r zbiorów (włączając w to powtórzenia). Łącznie będzie na tej liście $r(n - p)$ elementów. Ale, na mocy powyższych uwag, żadna liczba j nie może występować na niej więcej niż $n - p$ razy, czyli jest oczywiste, że lista ta musi zawierać co najmniej r różnych liczb. Stąd już wynika, że dowolnych r zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$ zawiera w sumie co najmniej r różnych liczb i, na mocy twierdzenia Halla, $\mathcal{A}$ ma transwersalę.

Jak zauważyliśmy powyżej, każda transwersala rodziny $\mathcal{A}$ może być użyta do utworzenia, w oczywisty sposób, dodatkowego wiersza dla L , dając w efekcie prostokąt łaciński wymiaru $(p+1) \times n$. Wówczas możemy rozpocząć cały proces od początku, powtarzając go tak długo, aż osiągniemy kwadrat łaciński wymiaru $n \times n$. $\square$

Twierdzenie to pokazuje, że zawsze możemy rozszerzyć prostokąt łaciński wymiaru $p \times n$ do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$. Teraz weźmiemy pod uwagę prostokąty o wymiarach $p \times q$: jak widzieliśmy wcześniej, nie we wszystkich przypadkach takie rozszerzenie jest możliwe.

Przykład: Czy prostokąt łaciński

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru 6×6 ?

Rozwiązanie: Nie. Jednym ze sposobów przekonania się o tym jest zauważenie, że w każdym rozszerzeniu do kwadratu łacińskiego wymiaru 6×6 , tak jak pokazano poniżej, musielibyśmy mieć trzy piątki w zaznaczonej ramce. Jest to niemożliwe, gdyż są dostępne dla nich tylko dwie kolumny.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & \boxed{\begin{matrix} - & - \end{matrix}} \\ 5 & 6 & 3 & 1 & \boxed{\begin{matrix} - & - \end{matrix}} \\ 1 & 3 & 6 & 2 & \boxed{\begin{matrix} - & - \end{matrix}} \\ 3 & 2 & 4 & 6 & \boxed{\begin{matrix} - & - \end{matrix}} \\ - & - & - & - & \boxed{\begin{matrix} - & - \end{matrix}} \\ - & - & - & - & \boxed{\begin{matrix} - & - \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

W ogólnym przypadku, aby istniała jakakolwiek szansa rozszerzenia prostokąta łacińskiego wymiaru $p \times q$ (o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$) do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$, muszą być zadane ograniczenia na liczbę wystąpień elementów w L . Wyobraźmy sobie, że można rozszerzyć L , jak pokazano poniżej, oraz że liczba i występuje w L dokładnie $L(i)$ razy.

Aby element i występował raz w każdym wierszu żądanego kwadratu, musi on występować p razy w pierwszych p wierszach, a co za tym idzie, $p - L(i)$ razy w prawym górnym obszarze. Ale tam jest tylko $n - q$ kolumn. Czyli, aby mieć jakąkolwiek możliwość rozszerzenia L do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$, jest konieczne, by $p - L(i) \leq n - q$ lub

$$L(i) \geq p + q - n \text{ dla każdego } i \in \{1, \dots, n\}$$

Jest godne podkreślenia, że warunki te okazują się być zarówno koniecznymi, jak i dostatecznymi dla rozszerzenia prostokąta L do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$. I tym razem do udowodnienia tego wykorzystamy wyniki dotyczące transwersali, jednakże wybór transwersali musi być dokonany bardzo uważnie, jak to ilustruje następujący przykład.

Przykład: Stosując pojęcie systemu różnych reprezentantów, pokazać w jaki sposób prostokąt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru 5×5 .

Rozwiązanie: Zadany prostokąt L jest wymiaru 2×3 , a więc $p = 2, q = 3$ oraz $n = 5$. Stąd $p + q - n$ jest równe zero i oczywiście $L(i) \geq p + q - n$, dla każdego i . Rozpocniemy rozszerzanie L do prostokąta łacińskiego wymiaru 2×4 , dodając nową kolumnę:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & - \\ 4 & 1 & 5 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \in \{2, 5\} \\ \nwarrow \in \{2, 3\} \end{matrix}$$

Można to uczynić na którykolwiek z trzech sposobów; w każdym przypadku możemy dalej próbować rozszerzyć go do prostokąta łacińskiego wymiaru 2×5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Niemożliwe}$$

W tych dwóch przypadkach mamy teraz prostokąty łacińskie wymiaru 2×5 i, na mocy poprzedniego twierdzenia, mogą być one rozszerzone do kwadratów łacińskich wymiaru 5×5 .

Ten prostokąt łaciński wymiaru 2×4 nie mógłby być rozszerzony, ponieważ $p = 2, q = 4$ i $p + q - n = 1$. Lecz $L(2) = 0$, a więc $L(2) < p + q - n$. $\square$

Załóżmy, że mamy dany prostokąt łaciński L wymiaru $p \times q$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$, w którym $L(i) \geq p + q - n$, dla $1 \leq i \leq n$. Chcemy rozszerzyć L do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$. Nauka płynąca z powyższego przykładu jest taka, że gdy dodajemy kolumnę do L w celu otrzymania prostokąta łacińskiego L' wymiaru $p \times (q + 1)$, musimy czynić to w taki sposób, aby proces ten mógł być powtórzony. Zatem żądamy, by liczba wystąpień elementu i w L'

$$L'(i) \geq p + (q + 1) - n$$

Stąd, jeżeli dla pewnego i mamy $L(i) = p + q - n$, musimy zapewnić, że i należy do nowej kolumny. Niech więc

$$P = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ oraz } L(i) = p + q - n\}$$

Wówczas, aby mogła być kontynuowana procedura, dodatkowa kolumna musi zawierać zbiór P , w tym bowiem przypadku każde i będzie występowało w nowym prostokącie co najmniej $p + (q + 1) - n$ razy.

Przykład: Stosując wyżej opisane postępowania, rozszerzyć

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

do kwadratu łacińskiego wymiaru 6×6 .

Rozwiązanie: Prześledzimy cały ten proces szczegółowo, aby pokazać znaczenie zbioru P oraz ułatwić zrozumienie dowodu kolejnego twierdzenia.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & - \\ 6 & 5 & 2 & - \\ 1 & 2 & 3 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \in \{2, 3, 4\} \\ \swarrow \in \{1, 3, 4\} \\ \swarrow \in \{4, 5, 6\} \end{matrix}$$

$$p + q - n = 3 + 3 - 6 = 0$$

Nowa kolumna musi zawierać zbiór

$$P = \{i : L(i) = 0\} = \{4\}$$

Jedna z transwersal jest wyróżniona pismem półgrubym i możemy kontynuować procedurę:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & - \\ 6 & 5 & 2 & 1 & - \\ 1 & 2 & 3 & 5 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \{2, 3\} \\ \in \{3, 4\} \\ \in \{4, 6\} \end{matrix}$$

$$p + q - n = 3 + 4 - 6 = 1$$

Nowa kolumna musi zawierać zbiór

$$P = \{i : L(i) = 1\} = \{3, 4\}$$

Jedna z transwersal jest wyróżniona pismem półgrubym i możemy kontynuować procedurę:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & - \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & - \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \{2\} \\ \in \{3\} \\ \in \{4\} \end{matrix}$$

$$p + q - n = 3 + 5 - 6 = 2$$

Nowa kolumna musi zawierać zbiór

$$P = \{i : L(i) = 2\} = \{2, 3, 4\}$$

Jedna z transwersal (!) jest wyróżniona pismem półgrubym i daje ona prostokąt łaciński wymiaru 3×6

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia może być on teraz rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru 6×6 , jak na przykład

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Jesteśmy już prawie gotowi udowodnić nasz rezultat dotyczący rozszerzeń prostokątów łacińskich wymiaru $p \times q$. Jedyne co nam brakuje, to następujący lemat:

Lemat: Niech L będzie prostokątem łacińskim wymiaru $p \times q$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ i niech r oraz m będą liczbami całkowitymi takimi, że $0 \leq r \leq m < p$. Wówczas liczba elementów ze zbioru $\{1, \dots, n\}$, które występują dokładnie m razy w L oraz we wszystkich pierwszych r wierszach prostokąta L , nie może być większa niż

$$\frac{(n-q)(p-r)}{p-m}$$

Dowód: Niech t elementów spośród $\{1, \dots, n\}$ występuje w L dokładnie m razy oraz we wszystkich pierwszych r wierszach prostokąta L . Wówczas każda z tych t liczb występuje dokładnie $m-r$ razy w dolnym zacieniowanym obszarze prostokąta L . Każda z pozostałych $n-t$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ występuje w tym samym zacieniowanym obszarze co najwyżej $p-r$ razy. Zliczając więc wszystkie elementy występujące w zacieniowanym obszarze, mamy

$$(p-r)q \leq t(m-r) + (n-t)(p-r)$$

co redukuje się do

$$t(p-m) \leq (n-q)(p-r)$$

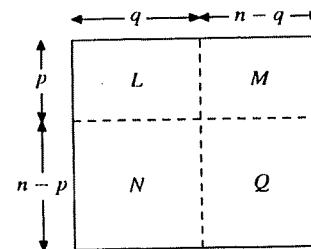
tak jak było żądane. □

Twierdzenie: Prostokąt łaciński L wymiaru $p \times q$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L(i)$, oznaczające liczbę wystąpień elementu i w L , spełnia warunek

$$L(i) \geq p + q - n$$

dla każdego i , przy czym $1 \leq i \leq n$.

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy najpierw, że prostokąt L może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$, tak jak pokazano poniżej:



Wówczas i występuje $L(i)$ razy w L oraz p razy w L i M wziętych łącznie. W ten sposób i występuje $p - L(i)$ razy w M . Ale i występuje $n - q$ razy w M oraz Q wziętych łącznie. Tak więc

$$p - L(i) \leq n - q, \text{ czyli } L(i) \geq p + q - n$$

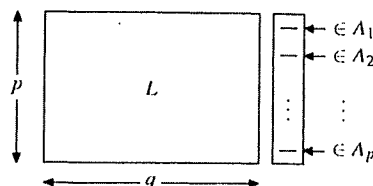
($\Leftarrow$) Załóżmy na odwrót, że dla każdego i , $L(i) \geq p + q - n$ oraz przyjmijmy, że $q < n$. Pokażemy, że L może być rozszerzony do prostokąta łacińskiego wymiaru $p \times (q+1)$ w taki sposób, iż procedurę tę można kontynuować aż do osiągnięcia prostokąta łacińskiego wymiaru $p \times n$. (Wówczas poprzednie twierdzenie gwarantuje, że taki prostokąt może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$).

Określmy, dla $1 \leq i \leq p$, zbiór A_i w następujący sposób:

$$A_i = \{\text{te liczby spośród } 1, 2, \dots, n, \text{ których nie użyto w } i\text{-tym wierszu w } L\}$$

oraz, tak jak w przykładach, niech zbiór P będzie określony następująco:

$$P = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ oraz } L(i) = p + q - n\}$$



Pokażemy, że $\mathfrak{A} = (A_1, \dots, A_p)$ ma transwersalę, która zawiera zbiór P . (Następnie użyjemy tej transwersali do wyznaczenia kolumny rozszerzającej L do prostokąta łacińskiego L' wymiaru $p \times (q+1)$).

Aby wykazać, że $\mathfrak{A}$ ma transwersalę, zauważmy, że

$$|A_1| = |A_2| = \dots = |A_p| = n - q$$

oraz że każdy element i występuje w co najwyżej $n - q$ spośród zbiorów $A_1, \dots, A_p$ (gdyż każdy element i nie występuje w $p - L(i) (\leq n - q)$ wierszach prostokąta L). Stąd, dokładnie tak samo jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, każde r spośród tych zbiorów zawiera w sumie co najmniej r różnych liczb. W ten sposób, na mocy twierdzenia Halla, $\mathfrak{A}$ ma transwersalę.

Aby udowodnić, że $\mathfrak{A}$ ma transwersalę, która zawiera zbiór P , pokażemy, że

$$\left| P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \right| \leq p - |I|$$

dla każdego $I \subseteq \{1, \dots, p\}$, a następnie zastosujemy twierdzenie ze strony 42. Aby uniknąć uciążliwych oznaczeń, pokażemy prawdziwość tej nierówności, gdy $I = \{1, \dots, r\}$ (tzn. rozważymy jedynie sumę pierwszych r zbiorów, a nie sumę dowolnych r zbiorów; ogólny przypadek jest bowiem bardzo podobny). Wówczas

$$\begin{aligned} \left| P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \right| &= \text{liczba elementów zbioru } P \text{ nie należących do żadnego z } A_1, \dots, A_r \\ &= \text{liczba elementów zbioru } P \text{ należących do wszystkich } r \text{ pierwszych wierszy prostokąta } L \end{aligned}$$

Teraz każdy element z P występuje dokładnie $p + q - n$ razy w L , więc wartość powyższego wyrażenia jest równa zero, gdy $r > p + q - n$. Jednakże, jeżeli $r \leq p + q - n$, to przyjmując w lemacie $m = p + q - n$, otrzymujemy

$$\left| P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \right| = \text{liczba elementów z } \{1, \dots, n\} \text{ występujących dokładnie } p + q - n \text{ razy w } L \text{ oraz występujących we wszystkich pierwszych } r \text{ wierszach } L$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(n-q)(p-r)}{p-(p+q-n)} \\ &= p-r \\ &= p-|I| \end{aligned}$$

tak jak było żądane. Stąd, na mocy twierdzenia ze strony 42, $\mathfrak{A}$ ma transwersalę, która zawiera zbiór P .

Użyjemy teraz tej transwersali do wyznaczenia dodatkowej kolumny dla prostokąta L , rozszerzając go w ten sposób do prostokąta łacińskiego L' wymiaru $p \times (q+1)$. Jeżeli $L'(i)$ oznacza liczbę wystąpień elementu i w L' , to mamy

$$L'(i) = L(i) + 1 = (p + q - n) + 1 \quad \text{jeżeli } i \in P$$

i

$$L'(i) \geq L(i) > p + q - n \quad \text{jeżeli } i \notin P$$

Stąd

$$L'(i) \geq p + (q+1) - n$$

i postępowanie to można na nowo powtórzyć. Mogą więc być tak dodawane dodatkowe kolumny aż do osiągnięcia prostokąta łacińskiego wymiaru $p \times n$. Poprzednie twierdzenie pokazuje zaś, że prostokąt ten może być dalej rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$, co kończy dowód. $\square$

Drugim aspektem kwadratów łacińskich, który będziemy rozważać, jest własność „ortogonalności”, pojęcie pojawiające się w zagadnieniu następującego typu:

Przykład: Oddział składa się z 16 oficerów należących do czterech pułków i mających cztery różne rangi. Należy ich ustawić w kwadrat wymiaru 4×4 tak, aby w każdym szeregu i w każdej kolumnie był jeden oficer z każdego pułku oraz jeden oficer każdej rangi.

Rozwiązanie: Zignorujmy na moment rangi oficerów i ustawmy ich po prostu tak, aby w każdym szeregu i w każdej kolumnie był oficer z każdego pułku 1, 2, 3 i 4, tak jak pokazano to poniżej po lewej stronie:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{Pułki oficerskie} \quad \text{Rangi oficerskie} \end{array}$$

Mamy więc teraz cztery pozycje zarezerwowane dla oficerów z pułku 1 itd. Musimy zdecydować, które z tych pozycji są przypisane oficerom z tego pułku o rangach 1, 2, 3 i 4. Jeden z możliwych sposobów ustawienia oficerów według rang pokazano powyżej po prawej stronie. Tak więc, przy takim układzie pierwsza pozycja w drugim szeregu będzie przydzielona oficerowi rangi trzeciej

z pułku drugiego. Łączne pozycje oficerów pokazano w następującej tablicy, gdzie w każdym przypadku pierwszy element oznacza pułk, a drugi element rangę:

$$\begin{pmatrix} 1,1 & 2,2 & 3,3 & 4,4 \\ 2,3 & 1,4 & 4,1 & 3,2 \\ 3,4 & 4,3 & 1,2 & 2,1 \\ 4,2 & 3,1 & 2,4 & 1,3 \end{pmatrix}$$

□

Jest jasne, że na rozwiązanie tego „problemu oficerów” składają się dwa kwadraty łacińskie. Ale jaki jest związek między tymi kwadratami? Kiedy łączymy je w ostateczną tablicę, 16 elementów składa się ze wszystkich możliwych par; 1, 1; 1, 2; 1, 3 ... 4, 4: dwa wyjściowe kwadraty łacińskie są nazywane „ortogonalnymi”. Ogólnie dwa kwadraty łacińskie $L = (l_{ij})$ i $M = (m_{ij})$ wymiaru $n \times n$ są ortogonalne, jeżeli wszystkie n^2 pary (l_{ij}, m_{ij}) są różne. Tablica par, utworzona z dwóch ortogonalnych kwadratów łacińskich, jest czasami nazywana *kwadratem grecko-łacińskim* lub *kwadratem Eulera*. Nazwisko Eulera będzie pojawiało się wielokrotnie w tej książce. To, że występuje ono w tym miejscu, jest związane z hipotezą postawioną przez Eulera w 1782 r., iż nie jest możliwe ustawienie 36 oficerów z 6 pułków i 6 różnych rang w kwadrat wymiaru 6×6 w ten sposób, aby w każdym szeregu i każdej kolumnie znajdował się jeden oficer z każdego pułku i jeden oficer o każdej randze. Używając naszej nowej terminologii, możemy powiedzieć, iż Euler przypuszczał, że nie istnieje para ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru 6×6 . Hipoteza ta została ostatecznie potwierdzona w 1900 r., po gruntownych badaniach wykonanych przez G. Tarry’ego (od tego czasu zostały znalezione rozmaite, daleko idące uproszczenia w jego metodzie dowodu).

Dla jakich wartości n istnieją więc ortogonalne kwadraty łacińskie wymiaru $n \times n$? Za chwilę zobaczymy, że przypadek $n = 2$ jest niemożliwy, gdyż jedynymi kwadratami łacińskimi wymiaru 2×2 są

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i, wierząc słowom Tarry’ego, niemożliwe jest to również dla $n = 6$. A co z pozostałymi wartościami? Euler sądził, że jest to nieprawdą dla wszystkich n , które są parzyste, ale nie są podzielne przez 4. Ta dużo mocniejsza hipoteza była stopniowo obalana dopóty, dopóki nie odrzucono jej całkowicie w 1960 r. Wtedy to bowiem R. C. Bose, S. S. Shrikhande i E. T. Parker przedstawili w *Canadian Journal of Mathematics* dowód, że dla **wszystkich** n , z wyjątkiem $n = 2$ i $n = 6$, istnieją pary ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$. Zajmiemy się teraz problemem znalezienia większych układów ortogonalnych kwadratów łacińskich.

Przykład: Znaleźć cztery kwadraty łacińskie wymiaru 5×5 , które są wzajemnie ortogonalne; tj. takie, że każda ich para jest ortogonalna.

Rozwiązanie: Jednym z takich układów jest

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Zauważmy przy okazji, że jest możliwe przedstawienie tego układu wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich w postaci pojedynczej macierzy:

$$M = \begin{matrix} & i & j & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

← Dla przykładu ten wiersz macierzy M zawiera informacje o wyrazie (2,4) w każdym z kwadratów łacińskich: w L_1 jest to 5, w L_2 jest to 1, w L_3 jest to 2 i w L_4 jest to 3.

Uporządkowanie wierszy w macierzy M jest bez znaczenia: my po prostu zapisaliśmy je w jak najbardziej naturalny sposób. Zauważmy, iż macierz M ma bardzo

specyficzną własność: w żadnym miejscu tej macierzy nie znajdziemy prostokąta postaci

$$\begin{matrix} x & \cdots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & y \end{matrix}$$

Dla przykładu istnienie takiego prostokąta w kolumnach 1 i 4 oznaczałoby, że w wierszu x kwadrat łaciński L_2 miałby dwa elementy y ; a taki prostokąt w kolumnach 3 i 5 zaprzeczałby ortogonalności L_1 i L_3 . Można samemu szybko prze-myśleć inne takie przypadki.

Ogólnie r dowolnych wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ może być w ten sposób przedstawionych w postaci jednej macierzy M wymiaru $n^2 \times (r+2)$ o elementach z $\{1, \dots, n\}$, nie zawierającej prostokątów opisanych powyżej. Ponadto odwrotne stwierdzenie jest też prawdziwe: dla zadanej dowolnej macierzy M wymiaru $n^2 \times (r+2)$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$, która nie zawiera prostokątów opisanych powyżej, oznakowanie kolumn macierzy M jako $i, j, L_1, \dots, L_r$ oznacza, że każdy wiersz w M może być użyty do określenia (i, j) -tych wyrazów pewnych macierzy $L_1, \dots, L_r$ wymiaru $n \times n$. Specyficzna własność „nieistnienia prostokątów” w M zapewnia, że są określone wartości wszystkich par (i, j) , że otrzymane macierze są kwadratami łacińskimi i że wszystkie są wzajemnie ortogonalne. Pozostawiamy ponownie potwierdzenie tych faktów czytelnikowi. $\square$

Naturalną rzeczą jest pytanie o największą możliwą liczbę wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$ dla danego $n > 1$. Następne twierdzenie pokazuje, że nigdy nie jest możliwe znalezienie n takich kwadratów.

Twierdzenie: Dla dowolnego całkowitego $n > 1$ istnieje co najwyżej $n-1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$.

Dowód: Niech $L_1, \dots, L_q$ będzie zbiorem wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$; naszym celem jest pokazanie, że $q \leq n-1$. Zauważmy, że w poprzednim przykładzie pierwszy wiersz każdego kwadratu łacińskiego miał postać $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$. Pokażemy teraz, że można zmodyfikować $L_1, \dots, L_q$, by otrzymać zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich $L'_1, \dots, L'_q$ wymiaru $n \times n$, z których każdy ma pierwszy wiersz w postaci $(1 \ 2 \dots n)$. Załóżmy, że pierwszym wierszem w L_1 jest $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$; w całej macierzy L_1 zamieńmy każde a_1 na jedynekę, każde a_2 na dwójkę, ... i każde a_n na n . Oznaczmy tak otrzymaną macierz przez L'_1 . Można bezpośrednio sprawdzić, że w dalszym ciągu L'_1 jest kwadratem łacińskim i jest ortogonalny z każdym kwadratem $L_2, \dots, L_q$. Powtarzając tę procedurę niezależnie dla każdego z pozostałych kwadratów łacińskich, otrzymujemy wzajemnie ortogonalne kwadraty łacińskie $L'_1, \dots, L'_q$, w których pierwszym wierszem jest $(1 \ 2 \dots n)$, tak jak żądaliśmy:

$$L'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ ? & & & & \end{pmatrix}, L'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ ? & & & & \end{pmatrix}, \dots, L'_q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ ? & & & & \end{pmatrix}$$

Jakie wyrazy mogą stać pod postacią „?” w tych q kwadratach łacińskich? Żaden z nich nie może być 1, gdyż 1 jest już w pierwszej kolumnie każdego kwadratu. Co więcej, żadne dwa „?” nie mogą być tym samym wyrazem. Gdybyśmy bowiem mieli na przykład

$$L'_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ i & & & & & & \end{pmatrix}, L'_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ i & & & & & & \end{pmatrix}$$

to w tablicy par utworzonych z tych dwóch kwadratów para i, i wystąpiłaby dwukrotnie, przecząc ortogonalności L'_j i L'_k . W ten sposób q elementów oznaczonych przez „?” jest różnymi elementami spośród $\{2, 3, \dots, n\}$, co implikuje, że $q \leq n-1$, kończąc dowód. $\square$

Predstawione w powyższym przykładzie cztery wzajemnie ortogonalne kwadraty łacińskie wymiaru 5×5 stanowią więc największy taki zbiór. Akuratnie dobrana postać tych czterech kwadratów pozwala przypuszczać, że dla pewnych n będzie istniała ogólna zasada konstruowania $n-1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich. Okazuje się, że jest to prawdą w przypadku, gdy n jest liczbą pierwszą (jak również, gdy n jest potęgą liczby pierwszej, ale udowodnienie tego wymaga bardziej zaawansowanej algebry).

Twierdzenie: Jeżeli n jest liczbą pierwszą lub potęgą liczby pierwszej, to istnieje $n-1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$.

Dowód: Do tej pory rozważane kwadraty łacińskie wymiaru $n \times n$ miały elementy ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, jednak w tym dowodzie jest bardziej użyteczne wybranie elementów ze zbioru $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Arytmetyka modulo pozwala dobrze określić działania dodawania i mnożenia na zbiorze $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Oznacza to, że wynik tych działań na elementach ze zbioru $\{0, 1, \dots, n-1\}$ też należy do tego zbioru. Dla przykładu tabele dodawania i mnożenia „mod 5” przedstawiają się następująco:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Dodawanie modulo 5

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Mnożenie modulo 5

Te działania arytmetyczne są nade wszystko zwykłymi operacjami, w których otrzymane wyniki są redukowane „mod n ”, odrzucając możliwe wielokrotności liczby n . (Jeżeli czytelnik ma dostateczne wiadomości z algebry abstrakcyjnej, to zauważy, że gdy n jest liczbą pierwszą, powyższe operacje definiują „ciało”).

Niech teraz n będzie liczbą pierwszą i niech $+$ oraz $\cdot$ oznaczają dodawanie i mnożenie „mod n ”. Określmy zbiór złożony z macierzy $L_1, \dots, L_{n-1}$ wymiaru $n \times n$ w ten sposób, że (i, j) -tym wyrazem w L_k jest $k \cdot (i-1) + (j-1)$. (Jeżeli zrobimy to dla przypadku $n=5$, to otrzymamy cztery kwadraty łacińskie wymiaru 5×5 , bardzo blisko spokrewnione ze zbiorem przedstawionym we wcześniejszym przykładzie). Jest jasne, że takie postępowanie określa pewien zbiór macierzy wymiaru $n \times n$, o elementach wybranych spośród $\{0, 1, \dots, n-1\}$: pokażemy teraz, że zbiór ten jest złożony z $n-1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$.

(i) L_k nie zawiera powtarzających się elementów w j -tej kolumnie. Gdyby (i, j) -ty wyraz równał się (i', j) -temu wyrazowi w L_k , gdzie $i > i'$, to

$$k \cdot (i-1) + (j-1) = k \cdot (i'-1) + (j-1)$$

i (jako że $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zupełnie naturalnymi) mielibyśmy

$$k \cdot (i-1) = k \cdot (i'-1)$$

Oznacza to, że $k(i-1)$ oraz $k(i'-1)$ dają tę samą resztę z dzielenia przez n oraz że ich różnica $k(i-i')$ jest podzielna przez n . Ponieważ n jest liczbą pierwszą, możemy wnioskować, że albo k , albo $i-i'$ jest podzielne przez n . Jest to oczywiście niemożliwe, gdyż $1 \leq k \leq n-1$ oraz $1 \leq i-i' \leq n-1$. W ten sposób żadna macierz L_k nie zawiera powtarzających się elementów w jakiegokolwiek kolumnie.

(ii) L_k nie zawiera powtarzających się elementów w i -tym wierszu. Jest to przypadek bardzo podobny do (i), a ponadto łatwiejszy, dlatego jego sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi.

(iii) Własności (i) oraz (ii) potwierdzają, że wszystkie L_k są kwadratami łacińskimi. Pokażemy teraz, że L_k i $L_{k'}$ są ortogonalne.

Jeżeli $k \neq k'$ oraz L_k i $L_{k'}$ nie byłyby ortogonalne, to w tablicy par utworzonych z tych dwóch kwadratów istniałaby para występująca dwukrotnie, powiedzmy, na pozycjach (i, j) oraz (i', j') .

$$L_k = \begin{pmatrix} x & & \\ & x & \\ & & \uparrow \uparrow \\ & & j & j' \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow i' \end{matrix} \quad L_{k'} = \begin{pmatrix} y & & \\ & y & \\ & & \uparrow \uparrow \\ & & j & j' \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow i' \end{matrix}$$

Ale wówczas (i, j) -ty wyraz w L_k będzie równy (i', j') -temu wyrazowi w L_k i analogicznie, (i, j) -ty wyraz w $L_{k'}$ będzie równy (i', j') -temu wyrazowi w $L_{k'}$; tj.

$$k \cdot (i-1) + (j-1) = k \cdot (i'-1) + (j'-1)$$

i

$$k' \cdot (i-1) + (j-1) = k' \cdot (i'-1) + (j'-1)$$

Odjęcie tych dwóch równości pokazuje, że

$$(k-k')(i-i')$$

jest podzielne przez n , a rozumowanie podobne do tego z (i), wykorzystujące fakt, że n jest liczbą pierwszą, wskazuje, że jest to niemożliwe. W ten sposób L_k i $L_{k'}$ są rzeczywiście ortogonalne.

Zobaczyliśmy zatem, jak skonstruować $n-1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$, gdy n jest liczbą pierwszą. Przedstawimy teraz krótki zarys tego, w jaki sposób rozszerzyć tę konstrukcję na przypadek, gdy n jest potęgą liczby pierwszej: w tym celu musimy posłużyć się bardziej zaawansowaną algebrą abstrakcyjną, być może więc niektórzy czytelnicy zechcą pominąć pozostałą część dowodu.

W omawianej konstrukcji istotną własnością zbioru $\{0, 1, \dots, n-1\}$ wraz z działaniami $+$ i $\cdot$ jest to, że tworzy on pewne ciało (przede wszystkim pod względem matematycznym działania te są poprawne i, w szczególności, jeżeli iloczyn dwóch liczb jest zerem, to jedna z tych liczb musi być zerem). Gdy n jest potęgą liczby pierwszej, taka struktura przestaje być ciałem (na przykład, jeżeli $n = p^r$, gdzie $r > 1$, to $p \cdot p^{r-1} = 0$). Niemniej w przypadku tym jest w dalszym ciągu możliwe zdefiniowanie innych działań dodawania i mnożenia na zbiorze $\{0, 1, \dots, n-1\}$, które czynią z niego ciało: ciało to znane jest jako *ciało Galois* $GF(n)$. Szczegółowe określenie tych operacji (definiowanych poprzez wielomiany) nie ma dla nas tutaj większego znaczenia, jednak, jeżeli już wiemy, że takie ciało istnieje, to pierwsza część dowodu może być łatwo uogólniona na przypadek, gdy n jest potęgą liczby pierwszej. $\square$

W powyższym dowodzie zobaczyliśmy przede wszystkim, że jeżeli istnieje ciało o n elementach, to wówczas istnieje $n-1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$ (ale nie na odwrót). Ponadto wiadomo, że ciało takie istnieje tylko wtedy, kiedy n jest liczbą pierwszą lub potęgą liczby pierwszej. Wciąż jednak pozostaje nie rozwiązana hipoteza głosząca, że „kompletny

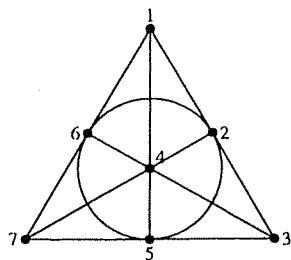
zbiór” $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$ istnieje **wtedy i tylko wtedy**, gdy n jest liczbą pierwszą lub potęgą liczby pierwszej. Za chwilę powrócimy do tej hipotezy.

Ostatnie z rozważanych zagadnień w tym rozdziale wydaje się, na pierwszy rzut oka, nie związane z kwadratami łacińskimi. Na początku naszego wieku Oswald Veblen, wraz z innymi, rozważał abstrakcyjną postać „geometrii”, której typową ilustracją jest następujący przykład:

Przykład: Zauważmy, że na przedstawionym rysunku jest siedem „punktów” i siedem „linii” (włączając linię kołistą), mających następujące własności:

- (i) każde dwa punkty leżą na dokładnie jednej linii;
- (i)' każde dwie linie spotykają się dokładnie w jednym punkcie;
- (ii) każda linia zawiera trzy punkty;
- (ii)' każdy punkt leży na trzech liniach.

Tak więc jest to zbiór „punktów” $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i rodzina „linii” $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 6\}$ i $\{3, 5, 7\}$. $\square$



Ogólnie skończona płaszczyzna rzutowa (rzędu n) składa się ze skończonego zbioru (którego elementy są nazywane *punktami*) i rodziny podzbiorów tego zbioru (w której każdy podzbiór nazywa się *linią*), spełniających warunki:

- (i) każde dwa punkty leżą na dokładnie jednej linii;
- (i)' każde dwie linie spotykają się dokładnie w jednym punkcie;
- (ii) każda linia zawiera $n + 1$ punktów;
- (ii)' każdy punkt leży na $n + 1$ liniach.

Tak więc poprzedni przykład dotyczył skończonej płaszczyzny rzutowej rzędu 2. Zobaczymy w zadaniach, że skończona płaszczyzna rzutowa rzędu n musi mieć dokładnie $n^2 + n + 1$ punktów. W rzeczywistości takie geometrie można określić za pomocą mniejszego układu aksjomatów, a ponadto mają one ciekawe własności „dualności” otrzymywane przez zamianę rolami punktów oraz linii. Z niektórymi z tych własności zapoznamy się w kontekście konfiguracji kombinatorycznych w rozdziale 15. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć na przykład w książce H. J. Rysera *Combinatorial mathematics*, cytowanej w spisie literatury.

Jaki jest jednak związek między skończonymi płaszczyznami rzutowymi a kwadratami łacińskimi? Wiadomo, że skończone płaszczyzny rzutowe rzędu n istnieją, jeżeli n jest liczbą pierwszą lub potęgą liczby pierwszej; przypuszcza się, że są one w rzeczywistości jedynymi, które istnieją. Bardzo to przypomina hipotezę dotyczącą istnienia $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich i, jak teraz zobaczymy, te dwa egzystencjalne problemy są równoważne.

Twierdzenie: Skończona płaszczyzna rzutowa rzędu n istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$.

Szkic dowodu: Zilustrujemy jedynie związek między tymi dwoma zagadnieniami, konstruując skończoną płaszczyznę rzutową rzędu 3 z zadanych dwóch ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru 3×3 i, na odwrót, konstruując dwa ortogonalne kwadraty łacińskie wymiaru 3×3 z zadanej płaszczyzny rzutowej rzędu 3. Oczywiście to nie stanowi dowodu ogólnego rezultatu, ale użyte techniki można łatwo uogólnić (zamieścimy w stosownych miejscach pewne uwagi dotyczące przypadku ogólnego).

($\Leftarrow$) Rozpocznijmy od dwóch ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru 3×3 :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zapiszmy je w postaci jednej macierzy, tak jak czyniliśmy to poprzednio:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{np. wyraz (1,3) w } L_1 \text{ wynosi 2,} \\ \text{a w } L_2 \text{ wynosi 3.} \end{array}$$

Wprowadźmy teraz zbiór złożony z 13 punktów: $\{c_1, c_2, c_3, c_4, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$ (który można traktować jako nazwy kolumn 1–4 oraz wierszy 1–9). Rozważmy dalej „linie” utworzone przez następujące podzbiory czterech z tych punktów:

$$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

oraz dowolne postaci

$$\{c_j, r_s, r_t, r_u\}$$

gdzie trzy elementy macierzy M leżące w j -tej kolumnie i w wierszach s, t oraz u są identyczne. Na przykład jednym z takich zbiorów będzie $\{c_2, r_3, r_6, r_9\}$, ponieważ elementy w wierszach 3, 6 i 9 kolumny 2 są takie same (mianowicie 3). Biorąc pod uwagę wszystkie możliwości, da to 13 następujących „linii”:

$$\begin{aligned} &\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \{c_1, r_1, r_2, r_3\} \{c_1, r_4, r_5, r_6\} \{c_1, r_7, r_8, r_9\} \\ &\{c_2, r_1, r_4, r_7\} \{c_2, r_2, r_5, r_8\} \{c_2, r_3, r_6, r_9\} \{c_3, r_2, r_6, r_7\} \{c_3, r_3, r_4, r_8\} \\ &\{c_3, r_1, r_5, r_9\} \{c_4, r_2, r_4, r_9\} \{c_4, r_1, r_6, r_8\} \{c_4, r_3, r_5, r_7\} \end{aligned}$$

Łatwo teraz można sprawdzić, że tych 13 punktów i zbiorów spełnia aksjomaty skończonej płaszczyzny rzutowej w przypadku $n = 3$. Ogólnie $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$ wyznacza macierz M wymiaru $n^2 \times (n + 1)$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$, która nie zawiera prostokątów postaci

$$\begin{array}{ccc} x & \dots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \dots & y \end{array}$$

Powyższa konstrukcja da wówczas $n^2 + n + 1$ punktów $\{c_1, \dots, c_{n^2+n+1}, r_1, \dots, r_{n^2}\}$ oraz $n^2 + n + 1$ linii, z których każda zawiera $n + 1$ punktów takich, że każda para punktów leży na dokładnie jednej linii. W ogólności własność, że M nie zawiera takich prostokątów, zapewnia, iż te punkty i linie będą spełniać aksjomaty skończonej płaszczyzny rzutowej. Dla przykładu ile punktów będzie należało do obu linii

$$\{c_j, r_i, \dots\} \text{ i } \{c_{j'}, r_{i'}, \dots\}?$$

Jeżeli $j = j'$, to jedynym wspólnym punktem jest oczywiście c_j . Jeżeli natomiast $j \neq j'$, to pierwsza linia powstanie ze wszystkich wierszy zawierających „1”, powiedzmy w j -tej kolumnie, a druga linia powstanie ze wszystkich wierszy zawierających „2”, powiedzmy w kolumnie j' . Własność niezawierania przez M charakterystycznych prostokątów zapewnia, że para $(1, 2)$ występuje w kolumnach j oraz j' dokładnie jeden raz (powiedzmy w i -tym wierszu, tak jak pokazano) a stąd, że zadane dwie linie przecinają się w dokładnie jednym punkcie r_i .

($\Rightarrow$) Na odwrót założmy, że jest dana skończona płaszczyzna rzutowa rzędu 3. Składać się ona będzie z 13 punktów i 13 linii, przy czym każda linia zawiera 4 punkty. Oznaczmy punkty jednej z tych linii jako c_1, c_2, c_3, c_4 , a pozostałe z nich jako $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$ oraz r_9 . Wówczas, dla przykładu, liniami mogą być:

$$\begin{aligned} &\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \{c_1, r_1, r_2, r_3\} \{c_1, r_4, r_5, r_6\} \{c_1, r_7, r_8, r_9\} \\ &\{c_2, r_1, r_4, r_7\} \{c_2, r_2, r_5, r_8\} \{c_2, r_3, r_6, r_9\} \{c_3, r_2, r_6, r_7\} \{c_3, r_3, r_4, r_8\} \\ &\{c_3, r_1, r_5, r_9\} \{c_4, r_2, r_4, r_9\} \{c_4, r_1, r_6, r_8\} \{c_4, r_3, r_5, r_7\} \end{aligned}$$

Fakt, iż każde dwie spośród tych linii mają dokładnie jeden wspólny punkt oznacza, że z wyjątkiem linii $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, pozostałych 12 linii musi rozbić się na cztery grupy, po trzy w każdej, w następujący sposób:

$$\begin{array}{lll} \text{zawierająca } c_1 : & \{c_1, r_1, r_2, r_3\} & \{c_1, r_4, r_5, r_6\} & \{c_1, r_7, r_8, r_9\} \\ \text{zawierająca } c_2 : & \{c_2, r_1, r_4, r_7\} & \{c_2, r_2, r_5, r_8\} & \{c_2, r_3, r_6, r_9\} \\ \text{zawierająca } c_3 : & \{c_3, r_2, r_6, r_7\} & \{c_3, r_3, r_4, r_8\} & \{c_3, r_1, r_5, r_9\} \\ \text{zawierająca } c_4 : & \{c_4, r_2, r_4, r_9\} & \{c_4, r_1, r_6, r_8\} & \{c_4, r_3, r_5, r_7\} \end{array}$$

1 2 3

Nazwijmy pierwszy zbiór w każdym szeregu jako „1”, drugi zbiór jako „2”, a trzeci jako „3”, jak to pokazano powyżej. Następnie zdefiniujmy macierz M wymiaru 9×4 , stosując zasadę, że (i, j) -tym wyrazem jest k , jeśli para $\{c_j, r_i\}$ należy do zbioru oznaczonego jako k . W naszym przykładzie da nam to macierz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{np. } \{c_4, r_5\} \text{ leży w zbiorze o numerze 3}$$

Możemy wówczas użyć tej macierzy do wyznaczenia, w naturalny sposób, dwóch ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru 3×3

$$L_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postępowanie takie okaże się poprawne w ogólnym przypadku: skończona płaszczyzna rzutowa rzędu n składająca się z $n^2 + n + 1$ punktów i linii wyznacza macierz M wymiaru $n^2 \times (n + 1)$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$. Aksjomaty skończonej płaszczyzny rzutowej zapewniają, że macierz M ma własność nieposiadania opisanych wyżej prostokątów, gdyż elementy postaci

$$i \rightarrow x \quad \dots \quad y$$

$$i' \rightarrow x \quad \dots \quad y$$

oznaczałyby, że $\{r_i, r_{i'}\}$ leży na dwóch liniach. W konsekwencji macierz M wyznacza $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$, co było do udowodnienia. $\square$

Twierdzenie o istnieniu $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$, implikuje więc istnienie skończonych płaszczyzn rzutowych rzędu $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ i 11 (liczby te są bowiem liczbami pierwszymi lub potęgami liczb pierwszych). Nie ma skończonej płaszczyzny rzutowej rzędu 6, bo jak zaobserwowaliśmy wcześniej, nie istnieje para ortogonalnych kwadratów łacińskich

wymiaru 6×6 . (W rozdziale 15 otrzymamy także nasz własny dowód nieistnienia skończonej płaszczyzny rzutowej rzędu 6). Następnym przypadkiem nie objętym przez nasze twierdzenia jest $n = 10$. Zadziwiające jest to, że nie tak dawno, bo w 1989 r., C. Lam, L. Thiel i S. Swierz mogli ogłosić, iż wyczerpująca analiza komputerowa (trwająca ponad 3000 godzin) wykazała nieistnienie skończonej płaszczyzny rzutowej rzędu 10.

ZADANIA

1. Dla jakich wartości i oraz j następujące prostokąty łacińskie o elementach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mogą być rozszerzone do kwadratów łacińskich wymiaru 6×6 ? W każdym z możliwych przypadków przedstawić jedno z takich rozszerzeń.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & j \end{pmatrix} \quad [\text{O}]$$

2. Pokazać, że istnieje co najmniej $1! \times 2! \times \dots \times n!$ kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$. [W]

3. Niech L będzie prostokątem łacińskim wymiaru $p \times q$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$, przy czym każdy element z $\{1, \dots, n\}$ występuje w L taką samą liczbę razy. Pokazać, że L może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego wymiaru $n \times n$.

4. Niech p, q oraz n będą ustalonymi liczbami całkowitymi, spełniającymi $1 \leq p, q < n$. Wówczas dowolny prostokąt łaciński wymiaru $p \times q$ o elementach z $\{1, \dots, n\}$ może być traktowany jako prostokąt łaciński wymiaru $p \times q$ o elementach z $\{1, \dots, N\}$, dla każdego $N \geq n$. Pokazać, że dowolny prostokąt łaciński wymiaru $p \times q$ może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego o pewnym wymiarze $N \times N$. Jaka jest (w zależności od p, q oraz n) najmniejsza wartość N , która będzie spełniała tę własność dla wszystkich prostokątów łacińskich wymiaru $p \times q$ o elementach z $\{1, \dots, n\}$? [W, O]

5. Pokazać, że jeżeli L oraz L^T (= transpozycja L) są ortogonalnymi kwadratami łacińskimi wymiaru $n \times n$, to główna przekątna w L nie ma powtarzających się elementów. Wywnioskować, że w przypadku $n = 3$ taka macierz L nie istnieje, oraz znaleźć L , gdy $n = 4$. [O]

6. (i) Stosując arytmetykę modulo opisaną w dowodzie twierdzenia na stronie 75 wyznaczyć cztery wzajemnie ortogonalne kwadraty łacińskie wymiaru 5×5 . (Gorliwy czytelnik mógłby następnie spróbować skonstruować skończoną płaszczyznę rzutową, stosując metodę z ostatniego dowodu). [O]

- (ii) Pokazać, że dla dowolnego n wynikiem takiego zastosowania arytmetyki modulo będą macierze $L_1, \dots, L_{n-1}$ wymiaru $n \times n$, przy czym L_k będzie kwadratem łacińskim wtedy i tylko wtedy, gdy k oraz n są liczbami względnie pierwszymi. Pokazać również, że L_k i $L_{k'}$ będą ortogonalnymi kwadratami łacińskimi wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą względnie pierwszą z każdą z liczb k, k' oraz $k - k'$. [W]

- (iii) Zdefiniujmy na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ działania $+$ i $\cdot$ w następujący sposób:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	2	3
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

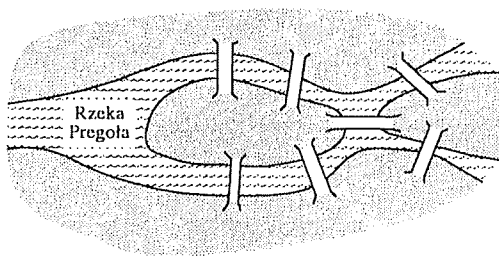
$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

(Zbiór $\{0, 1, 2, 3\}$ z tymi działaniami jest ciałem). Wykorzystując te działania, skonstruować trzy wzajemnie ortogonalne kwadraty łacińskie wymiaru 4×4 . [O]

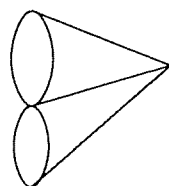
7. Pokazać, że skończona płaszczyzna rzutowa rzędu n składa się z $n^2 + n + 1$ punktów i $n^2 + n + 1$ linii. [W]

Pierwsze twierdzenie teorii grafów

W osiemnastym wieku mieszkańcy Królewca w Prusach Wschodnich (w momencie pisania tej książki — choć niekoniecznie w czasie jej czytania! — jest to Kaliningrad w Federacji Rosyjskiej) byli najwyraźniej zaintrygowani problemem, czy mogliby zwiedzić swoje miasto, przechodząc każdy z siedmiu mostów dokładnie jeden raz.



Królewiec

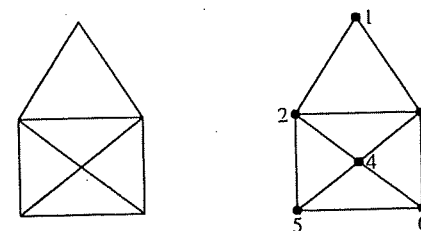


Schemat połączeń

Przedstawiając każdy z mostów jako linię, a każdy z obszarów lądowych jako pojedynczy punkt, możemy zauważyć, że jest to równoważne narysowaniu schematu przedstawionego po prawej stronie, bez odrywania ołówka i bez dwukrotnego rysowania jakiegokolwiek linii. W rozdziale 4 zaobserwowaliśmy już, stosując test dwoistości, że nie jest możliwe narysowanie w ten sposób żadnej figury, jeżeli ma ona więcej niż dwa punkty, z których wychodzi nieparzysta liczba linii. Ponieważ ta szczególna figura ma cztery „nieparzyste skrzyżowania”, nie jest możliwe znalezienie żądanej trasy. Takie matematyczne ujęcie tego problemu zostało po raz pierwszy sformułowane w 1736 r. w pracy Leonharda Eulera: tłumaczenie jego pracy można znaleźć w książce *Graph theory 1736-1936*, już wcześniej rekomendowanej. Strona tytułowa tej książki zawiera artystyczną impresję siedemnastowiecznego Królewca. Pierwsza data wymieniona w tytule książki odzwierciedla fakt, że praca Eulera jest ogólnie uznana za najwcześniejszą rozprawę naukową z dziedziny nazywanej dzisiaj teorią grafów. W rozdziale tym przyjrzymy się wynikowi Eulera oraz innym pokrewnym twierdzeniom dotyczącym szlaków w gra-

fach, które w pewnym sensie pokrywają cały graf. Pierwsze zadanie, motywacją którego jest problem mostów królewieckich, polega na scharakteryzowaniu tych grafów, które zawierają szlak przechodzący przez wszystkie jego krawędzie.

Przykład: Czy można narysować figurę przedstawioną po lewej stronie nie odrywając ołówka od papieru i nie rysując dwukrotnie żadnego kawałka linii? Równoważnie, czy graf przedstawiony po prawej stronie zawiera szlak przechodzący przez wszystkie jego krawędzie?



Rozwiązanie: Łatwo jest narysować lewą figurę w żądany sposób lub równoważnie zauważyć, że dla przykładu szlak 5,2,1,3,2,4,5,6,4,3,6 przechodzi przez wszystkie krawędzie grafu. □

Odnotujmy, że nasza obserwacja o nieparzystych skrzyżowaniach oznacza, iż grafy z więcej niż dwoma nieparzystymi wierzchołkami nie mogą zawierać szlaku przechodzącego przez wszystkie ich krawędzie. Również, aby taki szlak mógł istnieć, rozpatrywany graf musi być oczywiście spójny. Z naszych obserwacji nie możemy jednak wywnioskować, że jeżeli spójny graf ma dwa lub mniej wierzchołków stopnia nieparzystego (jak ten z poprzedniego przykładu), to na pewno będzie zawierał szlak przechodzący przez wszystkie krawędzie. Chociaż w swojej pracy z 1736 r. Euler dawał do zrozumienia, że to odwrotne stwierdzenie jest również prawdziwe, trzeba było czekać ponad wiek na formalny dowód: mimo to charakterystyka takich grafów, poprzez stopnie wierzchołków, jest ogólnie znana jako *twierdzenie Eulera* lub jako „pierwsze twierdzenie teorii grafów”. Rozpocznijmy od przypadku, w którym żąda się, aby szlak zakończył się w swoim punkcie wyjścia: w ogólności taki szlak nazywa się szlakiem *domkniętym*, natomiast domknięty szlak przechodzący przez wszystkie krawędzie grafu nazywa się *szlakiem Eulera*, a graf zawierający szlak Eulera, jest sam nazywany *eulerowskim*.

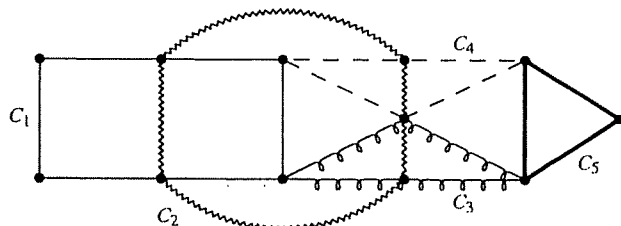
Twierdzenie: (Eulera/Hierholzera) Niech G będzie grafem spójnym. Następujące trzy własności są równoważne:

- (i) każdy wierzchołek w G ma stopień parzysty;
- (ii) G zawiera zbiór cykli, które między sobą używają dokładnie jeden raz każdą krawędź grafu G ;
- (iii) G jest eulerowski.

Dowód: (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Widzieliśmy już w zadaniu 3 na stronie 33, że (i) implikuje (ii) (w rzeczywistości założenie o spójności G nie jest tu wykorzystywane). Jeżeli

bowiem zachodzi (i), to G nie ma wierzchołka stopnia 1. W ten sposób, jeżeli $E \neq \emptyset$, to G zawiera składową nie będącą drzewem, a więc ma on cykl. Usuwa-
jąc krawędzie tego cyklu otrzymujemy graf, w którym każdy stopień wierzchołka
jest w dalszym ciągu parzysty. Postępowanie to można powtarzać do momentu,
gdy zostanie usunięta wystarczająca liczba cykli, wyczerpując przy tym wszystkie
krawędzie grafu G . Argument ten można uczynić bardziej przekonujący, stosując
indukcję matematyczną. Odwrotność, że (ii) implikuje (i), jest natychmiastowa.
Jeżeli bowiem jakiś wierzchołek leży na r spośród zadanych cykli, to ma on oczy-
wiście stopień równy $2r$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Jest intuicyjnie jasne, że jeżeli G jest spójny i składa się z roz-
łącznych cykli, tak jak opisano w (ii), to cykle te mogą być połączone razem
w taki sposób, że utworzą szlak Eulera (tj. domknięty szlak zawierający wszyst-
kie krawędzie grafu G). Aby uczynić ten argument bardziej pełny, zastosujemy
ponownie metodę indukcji. Załóżmy, że (ii) zachodzi oraz że G ma r cykli, które
między sobą używają dokładnie jeden raz każdą krawędź grafu. Wynioskujemy
przez indukcję względem r , że G zawiera szlak Eulera. Przypadek $r = 0$ jest ba-
nalny, gdyż wówczas spójny graf G składa się z pojedynczego wierzchołka, po-
wiedzmy v , i zdegenerowany domknięty szlak, składający się jedynie z v , będzie
zawierać „wszystkie” krawędzie grafu G . Załóżmy więc, że $r > 0$ oraz że wynik
jest prawdziwy dla grafów, które są sumą mniej niż r rozłącznych cykli. Ponie-
waż G jest spójny, możemy oznaczyć zbiór krawędzi tych r cykli jako $C_1, \dots, C_r$
w taki sposób, że dla każdego i graf składający się ze zbioru krawędzi $C_1 \cup \dots \cup C_i$
i ze zbioru wierzchołków będących wierzchołkami końcowymi tych krawędzi jest
grafem spójnym. Np.



Wówczas, w szczególności, graf o zbiorze krawędzi $C_1 \cup \dots \cup C_{r-1}$ i zbio-
rze wierzchołków będących wierzchołkami końcowymi tych krawędzi jest spójny
i każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty: na mocy założenia indukcyjnego
graf ten zawiera szlak Eulera. Ponieważ G jest spójny, w którymś miejscu szlak
ten będzie zawierał wierzchołek, który jest również wierzchołkiem końcowym
pewnej krawędzi z C_r , a więc można obejść dookoła wszystkie krawędzie nale-
żące do C_r . To da nam szlak Eulera w G , co było do udowodnienia.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Dowód, że (iii) implikuje (i) jest niczym innym, jak naszą wcześ-
szą obserwacją o nieparzystych skrzyżowaniach. Dokładniej mówiąc, załóżmy

prawdziwość (iii) i niech $G = (V, E)$ zawiera szlak Eulera

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1$$

Wówczas E składa się z n krawędzi

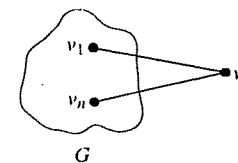
$$E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_n v_1\}$$

Łatwo można wywnioskować, że jeżeli wierzchołek v grafu G występuje r razy
na liście $v_1, v_2, \dots, v_n$, to v ma w grafie G stopień $2r$. W konsekwencji każdy
z wierzchołków grafu G ma stopień parzysty, co daje nam (i). $\square$

Nie domknięty szlak przechodzący przez wszystkie krawędzie grafu nazywa
się szlakiem *semi-eulerowskim* (a graf zawierający taki szlak grafem *semi-
eulerowskim*). Wynioskujemy teraz odpowiedni rezultat dotyczący grafów
semi-eulerowskich.

Wniosek: Niech G będzie grafem spójnym. Wówczas G jest semi-eulerowski
wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $G = (V, E)$ ma semi-eulerowski szlak $v_1, v_2, \dots, v_n$ (tj.
 $v_1 \neq v_n$ i zawiera on wszystkie krawędzie grafu G). Niech v^* będzie nowym wierz-
chołkiem i rozważmy graf $G^* = (V \cup \{v^*\}, E \cup \{v_n v^*, v^* v_1\})$, jak to pokazano po-
niżej:



Jest oczywiste, że szlak $v_1, v_2, \dots, v_n, v^*, v_1$ jest szlakiem Eulera w grafie G^* .
Z twierdzenia wynika więc, że każdy wierzchołek w G^* ma stopień parzysty. Usu-
nięcie dwóch krawędzi $v_n v^*$ i $v^* v_1$ redukuje stopnie wierzchołków v_n i v_1 o jeden,
pozostawiając bez zmian stopnie pozostałych wierzchołków w G . W ten sposób
graf G ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, mianowicie v_n i v_1 .

($\Leftarrow$) Na odwrót załóżmy, że spójny graf $G = (V, E)$ ma n wierzchołków, z któ-
rych dokładnie dwa są stopnia nieparzystego: oznaczmy je symbolicznie v_1 i v_n .
Utwórzmy z grafu G , w dokładnie taki sam sposób jak powyżej, nowy graf G^* .
Jest oczywiste, że G^* jest spójny i że każdy jego wierzchołek ma parzysty stopień.
Na mocy ostatniego twierdzenia G^* zawiera pewien szlak Eulera. Będąc w do-
wolnym wierzchołku tego szlaku, możemy zacząć poruszać się w którymkolwiek
kierunku, a więc G^* zawiera szlak Eulera postaci:

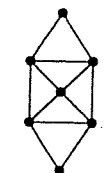
$$v^*, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v^*$$

Jest wówczas oczywiste, że szlak

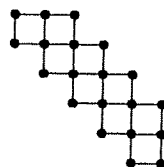
$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$$

jest semi-eulerowskim szlakiem w grafie G .

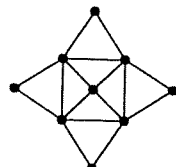
Przykłady:



eulerowski



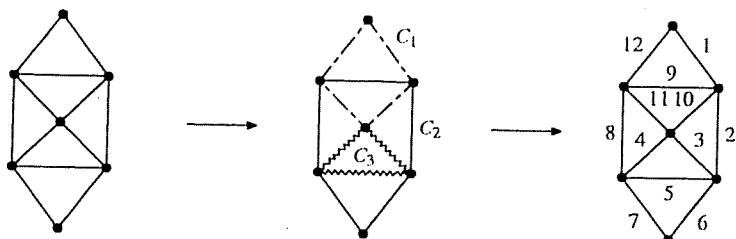
semi-eulerowski



ani jeden, ani drugi

Mając zadany spójny graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, można zastosować opisaną w dowodzie twierdzenia konstrukcję, która faktycznie wyznaczy szlak Eulera. Jest bowiem łatwo znaleźć i usunąć z grafu krawędzie należące do jakiegoś cyklu, powtarzając ten proces tak długo, aż nie znikną wszystkie krawędzie. Wówczas cykle te mogą być z powrotem złożone razem tak, by powstał żądany szlak Eulera.

Przykład:



Należy iść cyklem C_1 , i obejść dookoła każdy inny napotkany po raz pierwszy cykl.

Następujący algorytm daje jednak bardziej usystematyzowany sposób konstruowania szlaku Eulera. Wykorzystuje on pojęcie krawędzi, która „rozspójnia” graf: zupełnie naturalnie krawędź e spójnego grafu G rozspójnia G , jeżeli graf $(V, E \setminus \{e\})$ jest niespójny (taka krawędź jest nazywana czasami *przesmykiem* lub *mostem*). W istocie rzeczy algorytm nakazuje posuwać się wzdłuż dowolnego szlaku, tak jak chcemy, wymazując za sobą krawędzie, które już użyliśmy, jak również wymazując każdy z wierzchołków stopnia zero pozostający za nami: jedyną restrykcją jest to, że wolno nam przejść przez most tylko wtedy, kiedy nie mamy innej możliwości.

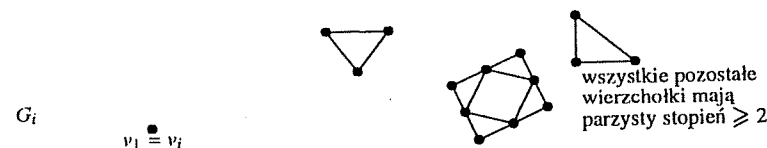
Twierdzenie: (Algorytm Fleury’ego) Mając zadany spójny graf G , w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, konstruujemy szlak w następujący sposób.

- I. Zapiszmy dowolny wierzchołek v_1 i niech G_1 będzie tym samym grafem co G .
- II. Załóżmy, że mamy wybrane już wierzchołki $v_1, \dots, v_i$ oraz że jest już ustalony graf G_i . Wówczas:
 - (i) jeżeli w G_i nie ma krawędzi postaci $v_i v$, to stop;
 - (ii) jeżeli G_i ma krawędź $v_i v$, która nie rozspójnia G_i , to niech v_{i+1} będzie wierzchołkiem v , a G_{i+1} będzie grafem powstałym z G_i przez usunięcie krawędzi $v_i v_{i+1}$ oraz wierzchołka v_i , jeżeli po usunięciu tej krawędzi ma on stopień zero; następnie powtórzmy krok II;
 - (iii) jeżeli każda z krawędzi G_i postaci $v_i v$ rozspójnia G_i , to niech v_{i+1} będzie którymkolwiek z wierzchołków v , a G_{i+1} będzie grafem powstałym z G_i przez usunięcie krawędzi $v_i v_{i+1}$ i wierzchołka v_i , jeżeli po usunięciu tej krawędzi ma on stopień zero; następnie powtórzmy krok II;

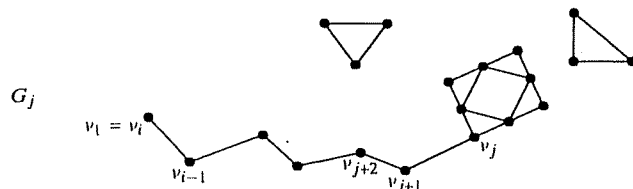
Tak otrzymany ciąg wierzchołków będzie szlakiem Eulera w grafie G .

Dowód: Zastosujemy algorytm do grafu G o zadanych własnościach. W każdym kroku G_i jest grafem G , z którego usunięto krawędzie $v_1 v_2, \dots, v_{i-1} v_i$ oraz usunięto te z wierzchołków $v_1, \dots, v_{i-1}$, które stały się wierzchołkami stopnia zero. Można więc łatwo zauważyć, że w każdym grafie G_i wszystkie wierzchołki z wyjątkiem co najwyżej v_1 i v_i są stopnia parzystego, przy czym te dwa wyróżnione wierzchołki mają stopień nieparzysty, gdy $v_1 \neq v_i$, a stopień parzysty, gdy $v_1 = v_i$. Co więcej, każdy z wierzchołków w G_i jest dodatniego stopnia z wyjątkiem, co najwyżej, wierzchołka v_i .

Założmy, że algorytm zatrzymał się na grafie G_i : na pewno wygenerował on do tej pory w G szlak $v_1, \dots, v_i$, a powodem zatrzymania musiał być brak w G_i krawędzi postaci $v_i v$. Oznacza to, że wierzchołek v_i ma w G_i stopień zero i, jako że jest to stopień parzysty, na mocy powyższych uwag, mamy $v_i = v_1$, czyli wygenerowany szlak jest domknięty. Jeżeli jednocześnie algorytm wykorzystał wszystkie krawędzie grafu G , to jest on żądanym szlakiem Eulera. Z drugiej strony, jeżeli któraś z krawędzi grafu G nie wystąpiła w otrzymanym szlaku, to G_i będzie mieć niepusty zbiór krawędzi i musi mieć on następującą postać:

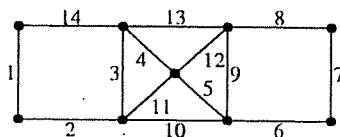


Ponieważ G był spójny, zatem co najmniej jeden z wierzchołków $v_2, \dots, v_{i-1}$ musi pozostać w G_i . Niech więc v_j będzie ostatnim takim wierzchołkiem. Wtedy wcześniejszy graf G_j musi mieć następującą postać:



Lecz w takim przypadku, w jaki sposób algorytm dokonał przejścia od G_j do G_{j+1} ? Wykorzystał krawędź $v_j v_{j+1}$, która rozspójnia G_j wtedy, kiedy była dostępna opcja krawędzi nie rozspójniającej. Jest to sprzeczne z faktem, że nasz szlak został wygenerowany przez algorytm. W ten sposób algorytm generuje domknięty szlak, składający się ze *wszystkich* krawędzi grafu G i twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

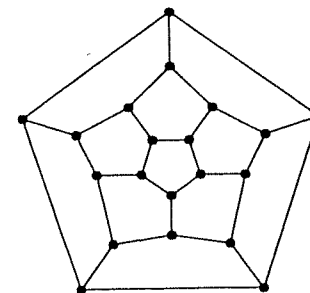
Przykład: Dla przedstawionego poniżej grafu został pokazany jeden z możliwych szlaków Eulera, który wyznaczył algorytm Fleury'ego. Krawędzie szlaku ponumerowano w takiej kolejności, jak pojawiały się podczas jego generowania: prześledźmy to samodzielnie (gumka w ręce!), zwracając szczególną uwagę na dwa momenty ($3 \rightarrow 4$ i $8 \rightarrow 9$), kiedy należy unikać rozspójniającej krawędzi.



Rozważmy teraz inne zagadnienie, w którym zamiast szukać określonej trasy poprzez wszystkie krawędzie grafu, będziemy chcieli znaleźć specjalnego typu określoną trasę przechodzącą przez wszystkie wierzchołki.

Przykład: Oznaczyć wierzchołki przedstawionego grafu liczbami $1, 2, \dots, 20$ w ten sposób, że wierzchołek 1 jest połączony z 2, 2 jest połączony z 3, ..., 19

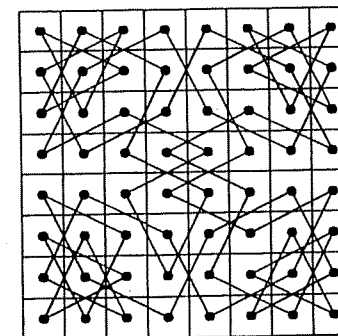
jest połączony z 20 i 20 jest połączony z 1.



To proste zadanie pozostawiamy do samodzielnego rozwiązania. Jest ono podstawą gry wymyślonej przez znanego algebraika Sir Williama Rowana Hamiltona w 1856 r. W terminologii teoriografowej poszukujemy cyklu, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki: takie cykle są obecnie znane jako *cykle Hamiltona*, a graf, który zawiera cykl Hamiltona, sam nazywa się *hamiltonowskim*. Spotkaliśmy się z tym pojęciem w zadaniu 11 na stronie 60, gdzie również mieliśmy do czynienia z następującym przykładem:

Przykład: Wyznaczyć dla skoczka trasę po szachownicy tak, że zanim powróci on na pole, z którego wystartował, odwiedzi dokładnie raz każdy kwadrat szachownicy.

Rozwiązanie: Potraktujemy kwadraty szachownicy jako wierzchołki grafu, przy czym dwa z nich połączymy krawędzią, jeżeli jest możliwy ruch skoczka z jednego pola na drugie. Wtedy znalezienie trasy dla skoczka jest równoznaczne ze znalezieniem cyklu Hamiltona. Jeden z wielu takich cykli jest pokazany poniżej:



W przypadku szlaków Eulera mogliśmy przedstawić bardzo prosty opis grafów, które je zawierają. Nie jest jednak znana żadna prosta charakterystyka grafów zawierających cykl Hamiltona. Istnieje kilka twierdzeń podających warunki do-

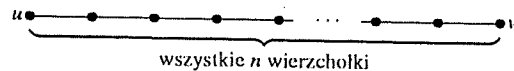
stateczne istnienia cyklu Hamiltona: warunki te zwykle obejmują żądanie, aby graf miał wiele krawędzi. Przedstawimy teraz jeden z takich wyników. (Łatwo można zauważyć, rozważając graf będący pojedynczym cyklem o więcej niż czterech krawędziach, że wynik odwrotny jest fałszywy.)

Twierdzenie: Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, w którym $|V| \geq 3$ i takim, że $\delta u + \delta v \geq |V|$ dla każdej pary różnych nie połączonych wierzchołków u i v . Wówczas G jest grafem hamiltonowskim.

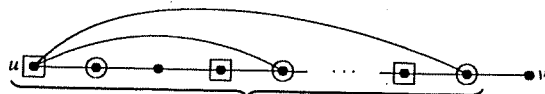
Dowód: Załóżmy, że twierdzenie nie zachodzi dla pewnego grafu o n (≥ 3) wierzchołkach. Istnieje więc graf na n wierzchołkach, mający następujące dwie własności:

$\delta u + \delta v \geq n$ dla każdej pary nie połączonych wierzchołków	nie ma cyklu Hamiltona
---	---------------------------

Dodajmy do tego grafu tyle krawędzi, ile jest to możliwe, tak, aby nie powstał cykl Hamiltona. Wówczas obie z powyższych własności w dalszym ciągu zachodzą, ale graf, który otrzymujemy, jest największym takim grafem na n wierzchołkach. Oczywiście G nie jest grafem pełnym na n (≥ 3) wierzchołkach, bo wówczas zawierałby cykl Hamiltona. Czyli G ma parę wierzchołków, powiedzmy u i v , która nie jest połączona krawędzią. Graf G został tak dobrany, iż dodanie nowej krawędzi utworzy w nim cykl Hamiltona. W ten sposób dodanie krawędzi uv utworzyłoby cykl Hamiltona, co oznacza, że G zawiera szlak od u do v , przechodzący przez każdy z n wierzchołków grafu G dokładnie jeden raz:



Postawmy kółko dookoła każdego z δu wierzchołków, z którymi jest połączony wierzchołek u i kwadrat dookoła każdego wierzchołka, który leży bezpośrednio po lewej stronie kółka:



δu wierzchołków spośród $n - 1$ jest oznaczonych kółkiem

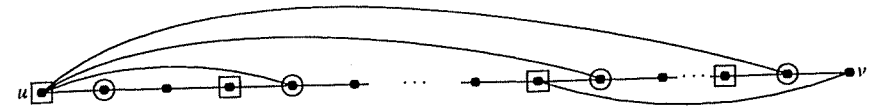
$\therefore \delta u$ wierzchołków spośród $n - 1$ jest oznaczonych kwadratem

$\therefore n - \delta u - 1$ spośród tych wierzchołków nie jest oznaczonych kwadratem

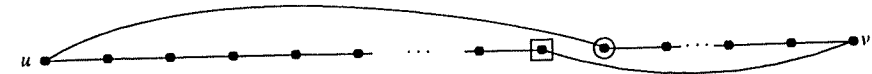
Ile spośród tych $n - 1$ wierzchołków jest połączonych z v ?

liczba tych wierzchołków, które są połączone z v = $\delta v \geq n - \delta u >$ liczba tych wierzchołków, które nie są oznaczone kwadratem

Wynika stąd, że wierzchołek v musi być połączony z pewnym wierzchołkiem oznaczonym kwadratem:



Ale wówczas graf G ma następujący cykl Hamiltona, co przeczy przyjętym założeniom o G :



Ta sprzeczność pokazuje, że twierdzenie jest zawsze prawdziwe. $\square$

ZADANIA

- (i) Dla jakich n graf pełny K_n jest eulerowski, a dla jakich n jest on semi-eulerowski? [O]
- (ii) Dla jakich m i n dwudzielny graf pełny $K_{m,n}$ jest eulerowski, a dla jakich m i n jest on semi-eulerowski? [O]
- (iii) Dla jakich n , K_n jest hamiltonowski? [O]
- (iv) Dla jakich m i n , $K_{m,n}$ jest hamiltonowski? [O]
- Rozważmy szachownicę wymiaru $n \times n$. Dla jakich wartości n można znaleźć dla skoczka trasę dookoła szachownicy, w której każdy z możliwych ruchów jest wykonany dokładnie raz (w jednym lub drugim kierunku)? [O]
- Niech G będzie grafem spójnym na $k > 0$ wierzchołkach mających nieparzyste stopnie. Pokazać, że w grafie G istnieje $\frac{1}{2}k$ szlaków, które między sobą używają dokładnie jeden raz każdą krawędź grafu. [W]
- Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ jest graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, gdzie $\bar{E} = \{vw : v, w \in V, \text{ przy czym } v \neq w \text{ oraz } vw \notin E\}$ (tj. $\bar{G}$ zawiera wszystkie te i tylko te krawędzie, których nie ma w G). Znaleźć przykład grafu G , który jest eulerowski i którego dopełnienie jest również grafem eulerowskim. [O]
- Niech G będzie grafem na $2d + 1$ wierzchołkach, z których każdy ma stopień d . Pokazać, że G jest eulerowski. [W]
(Bardzo gorliwi czytelnicy mogą próbować rozważyć o wiele trudniejszy problem, mianowicie, czy dla $d > 0$ graf G jest również hamiltonowski.)

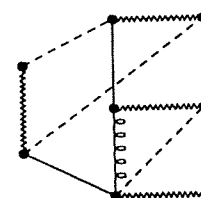
6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, gdzie $|V| \geq 3$, i dla każdego $v \in V$, $\delta v \geq \frac{1}{2}|V|$. Pokazać, że G jest hamiltonowski.
7. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem takim, że $|V| \geq 4$, oraz dla dowolnych trzech wierzchołków u, v i w co najmniej dwie spośród krawędzi uv, uw i vw należą do E . Pokazać, że G jest hamiltonowski.
8. W grupie złożonej z $2n$ uczniów każdy ma co najmniej n przyjaciół. Będąc na wycieczce, nauczyciel nakazał im trzymać się parami za ręce. Pokazać, że można to uczynić tak, że każda osoba trzyma rękę przyjaciela, a w przypadku gdy $n > 1$, wybór przyjaciół może być dokonany na co najmniej dwa różne sposoby.
9. Jest n różnych egzaminów, z których każdy jest przeprowadzony przez jednego egzaminatora. Każdy egzaminator ustala najwyżej połowę tematów. Pokazać, że można rozplanować egzaminy przez okres n kolejnych dni w taki sposób, że każdego dnia odbędzie się jeden egzamin, tematy jednego egzaminatora nie przypadną na dwa kolejne dni, a temat, który wybrała największa liczba kandydatów, będzie zaplanowany na pierwszy dzień. [W]
10. Pokazać, że jeżeli graf ma n wierzchołków i więcej niż $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$ krawędzi, to jest on hamiltonowski. Pokazać również, że zamieniając słowa „więcej niż” na „co najmniej”, otrzymamy stwierdzenie fałszywe dla każdego $n > 1$. [W]
11. Graf $G = (V, E)$ jest *semi-hamiltonowski*, jeżeli zawiera szlak przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Pokazać, że jeżeli dla każdej nie połączonej pary wierzchołków u i v , $\delta u + \delta v \geq |V| - 1$, to G jest semi-hamiltonowski (oczywiście może on również być hamiltonowski). [W]
12. Jeżeli $G = (V, E)$ jest dowolnym grafem oraz $v_1, \dots, v_r$ są pewnymi (ale nie wszystkimi) wierzchołkami grafu G , to $G \setminus \{v_1, \dots, v_r\}$ oznacza graf otrzymany z G przez usunięcie wierzchołków $v_1, \dots, v_r$ (wraz ze wszystkimi krawędziami dochodzącymi do tych wierzchołków).
- (i) Pokazać, że jeżeli $|V| \geq 3$ i jeżeli albo G jest pojedynczym cyklem, albo G jest grafem pełnym, to $G \setminus \{u\}$ jest spójny dla każdego $u \in V$, natomiast $G \setminus \{u, v\}$ jest niespójny dla każdej pary $u, v \in V$, dla której $uv \notin E$.
- (ii) Na odwrót pokazać, że jeżeli $|V| \geq 3$ oraz $G \setminus \{u\}$ jest spójny dla każdego $u \in V$, lecz $G \setminus \{u, v\}$ jest niespójny dla każdej pary $u, v \in V$, dla której $uv \notin E$, to albo G jest pojedynczym cyklem, albo G jest grafem pełnym.
- (Dowód tego odwrotnego twierdzenia — które jest wykorzystane w rozdziale 11 — jest o wiele trudniejszy: w rzeczywistości wystarczy tylko założyć, że $G \setminus \{u\}$ jest zawsze spójny i że $G \setminus \{u, v\}$ jest niespójny dla tych par wierzchołków u, v , gdzie $uv \notin E$, dla których istnieje wierzchołek w taki, że $uw, vw \in E$.) [W]

7

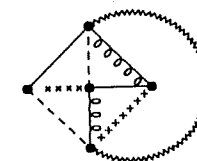
Kolorowanie krawędzi

Mając zadany graf, chcemy pokolorować jego krawędzie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie tego samego koloru nie mają wspólnego wierzchołka końcowego (takie kolorowanie jest nazywane *kolorowaniem krawędzi*). Jaka jest potrzebna najmniejsza liczba kolorów do pokolorowania dowolnego, określonego grafu?

Przykłady:



Kolorowanie krawędzi czterema „kolorami”



Kolorowanie krawędzi pięcioma „kolorami”

W każdym z tych przykładów największy stopień wierzchołka wynosi cztery. Jest więc oczywiste, że jakkolwiek by nie kolorować krawędzi każdego z tych grafów, są potrzebne co najmniej cztery kolory. W grafie po lewej stronie wystarczą cztery kolory, w przeciwieństwie do drugiego, gdzie należy użyć pięciu kolorów. □

Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do pokolorowania krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G i oznaczamy go przez $\chi_e(G)$. Jest oczywiste, że jeżeli największy stopień wierzchołka w G wynosi d , to $\chi_e(G) \geq d$, przy czym dla pewnych grafów (jak w grafie przedstawionym powyżej, po lewej stronie) tych d kolorów w rzeczywistości wystarcza i mamy wówczas $\chi_e(G) = d$. Nasze pierwsze proste twierdzenie charakteryzuje klasę grafów, dla których $\chi_e(G) > d$.

Twierdzenie: Jeżeli G jest grafem o nieparzystej liczbie wierzchołków, z których każdy ma stopień d większy od zera, to nie można pokolorować krawędzi grafu G za pomocą d kolorów.

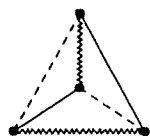
Dowód: Załóżmy, że graf G ma n wierzchołków, każdy o stopniu $d > 0$, przy czym n jest liczbą nieparzystą. Kolorując krawędzie grafu G , żaden kolor nie może wystąpić przy każdym wierzchołku więcej niż raz, więc może być co najwyżej $\frac{1}{2}n$ krawędzi o jednakowym (którymkolwiek) kolorze. Biorąc teraz pod uwagę, że n jest nieparzyste, może być co najwyżej $\frac{1}{2}(n-1)$ krawędzi każdego koloru. Zatem liczba różnych kolorów potrzebnych do pokolorowania krawędzi grafu jest większa bądź równa

$$\frac{\frac{1}{2}dn}{\frac{1}{2}(n-1)} = d \frac{n}{n-1} > d$$

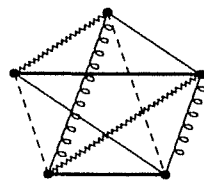
a więc potrzebnych jest więcej niż d kolorów. $\square$

Powyższy rezultat jest pomocny przy wyznaczeniu indeksów chromatycznych grafów pełnych.

Przykłady:



$$\chi_e(K_4) = 3$$



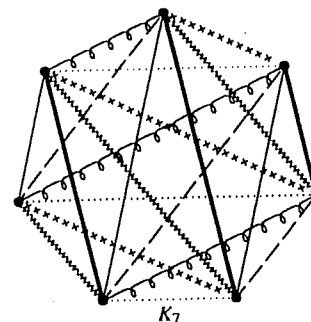
$$\chi_e(K_5) = 5$$

Twierdzenie: Indeks chromatyczny grafu pełnego K_n wynosi

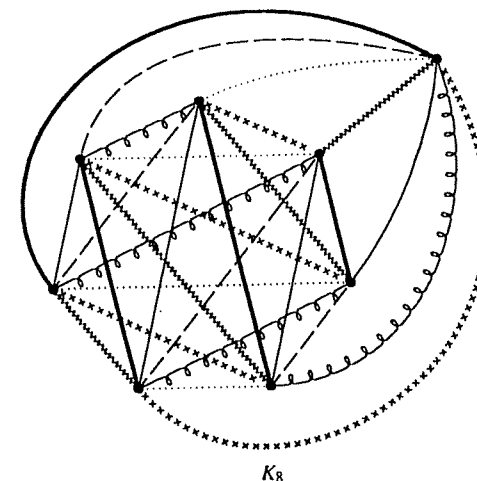
$$\chi_e(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzyste,} \\ n, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Dowód: Każdy wierzchołek grafu K_n ma stopień $n-1$. Z poprzedniego twierdzenia wynika więc od razu, że w przypadku gdy n jest nieparzyste, potrzeba więcej niż $n-1$ kolorów do pokolorowania krawędzi tego grafu. Pokażemy, że w tym przypadku $\chi_e(K_n) = n$, opisując sposób kolorowania krawędzi grafu K_n za pomocą n kolorów.

Założmy, że n wierzchołków tworzy prawidłowy wielobok o n bokach i narysujmy każdą krawędź jako linię prostą. Następnie pokolorujemy dwie krawędzie tym samym kolorem wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoległe. (Tak otrzymane kolorowanie w przypadku $n=5$ pokazano na prawym rysunku, gdzie $\chi(K_5) = 5$, natomiast dla $n=7$ na następnym rysunku). Dla n nieparzystego taka metoda da w efekcie pokolorowanie krawędzi grafu K_n za pomocą n kolorów. Jest jasne, że zostało użytych n kolorów, że żadne dwie krawędzie tego samego koloru nie „spotykają się” oraz że wszystkie $\frac{1}{2}n(n-1)$ krawędzi zostały pokolorowane (każdy kolor użyto dla dokładnie $\frac{1}{2}(n-1)$ krawędzi). Wykazaliśmy w ten sposób rezultat dla n nieparzystego.



K_7

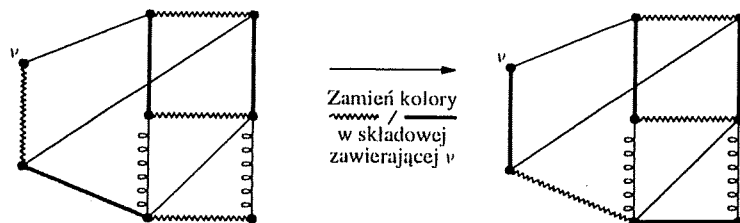


K_8

Niech teraz n będzie parzyste i pokolorujemy krawędzie grafu K_{n-1} za pomocą $n-1$ kolorów w sposób opisany powyżej. Zauważmy, że w tym kolorowaniu, przy każdym wierzchołku „brakuje” jednego koloru, a ponadto każdy z $n-1$ kolorów jest „brakującym” przy dokładnie jednym z wierzchołków. Dodajmy n -ty wierzchołek i połączmy go krawędzią po kolei z każdym z $n-1$ pozostałych wierzchołków. Pokolorujemy te krawędzie, używając każdorazowo „brakującego” przy danym wierzchołku koloru. Łatwo można zauważyć, że w wyniku takiego postępowania otrzymamy pokolorowanie krawędzi grafu K_n za pomocą $n-1$ kolorów: przypadek $n=8$ pokazano na rysunku. $\square$

Reasumując, każdy graf pełny o parzystej liczbie wierzchołków ma tę własność, że jego indeks chromatyczny jest równy największemu stopniowi wierzchołka. Przedstawimy teraz inną klasę grafów o tej samej własności: klasę grafów dwudzielnych. Zanim jednak dojdziemy do odpowiedniego rezultatu, pokażemy pewną sprytną metodę, którą będziemy stosowali w dowodach pozostałych twierdzeń tego rozdziału. Jeżeli mamy dane jakieś kolorowanie krawędzi grafu $G = (V, E)$ i podgraf na zbiorze wierzchołków V wyznaczony przez krawędzie pokolorowane jednym z dwóch kolorów, powiedzmy c i c' , to w tym podgrafie każdy wierzchołek będzie miał stopień 0, 1 lub 2. W ten sposób każda nietrywialna składowa tego podgrafu będzie składała się albo z cyklu, albo ze ścieżki, w których kolory krawędzi będą na przemian c/c' . Po chwili zastanowienia dojdziemy do wniosku, że zamieniając kolory w dowolnej składowej (tzn. kolorując kolorem c krawędź, która przedtem była pokolorowana kolorem c' i na odwrót), w dalszym ciągu otrzymujemy kolorowanie krawędzi grafu G tymi samymi kolorami, tak jak to pokazano na następującym przykładzie.

Przykład:



□

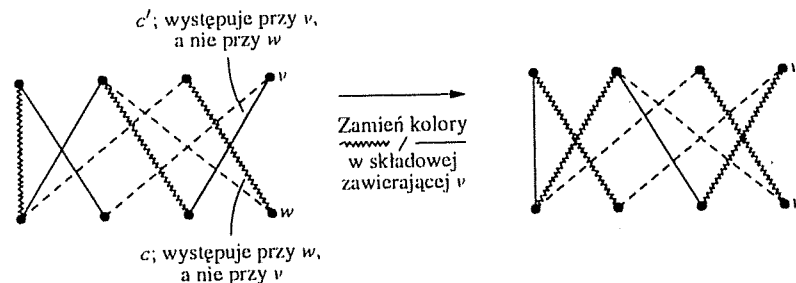
Twierdzenie: (Königa) Niech $G = (V_1, E, V_2)$ będzie grafem dwudzielnym, o największym stopniu wierzchołka równym d . Wówczas $\chi_e(G) = d$.

Dowód: Zastosujemy metodę indukcji względem $|E|$, przy czym przypadek $|E| = 0$ jest banalny. Załóżmy zatem, że graf $G = (V_1, E, V_2)$ ma $|E| > 0$ krawędzi, jego największy stopień wierzchołka wynosi d oraz że teza twierdzenia jest prawdziwa dla grafów dwudzielnych o liczbie krawędzi mniejszej niż $|E|$. Usuńmy z grafu G pewną krawędź vw , otrzymując nowy graf dwudzielny G' . Największy stopień wierzchołka w G' jest równy co najwyżej d , a więc na mocy założenia indukcyjnego, możemy pokolorować krawędzie grafu G' za pomocą d kolorów: wykonajmy jedno z takich kolorowań.

Jeżeli przy obu wierzchołkach v i w brakuje jednego z d kolorów, to ten właśnie kolor może być użyty do pomalowania krawędzi vw , dając żądane kolorowanie grafu G za pomocą d kolorów.

Założmy na odwrót, że do pokolorowania krawędzi wychodzących z wierzchołków v i w użyliśmy wszystkich kolorów. Ponieważ w grafie G' stopnie wierzchołków v i w są równe co najwyżej $d - 1$, zatem istnieje kolor, powiedzmy c , którego brakuje przy v (a więc jest on użyty przy w) oraz istnieje inny kolor, powiedzmy c' , którego brakuje przy w (a więc jest on użyty przy v). Rozważmy teraz podgraf grafu G' utworzony przez krawędzie koloru c lub c' i w szczególności weźmy pod uwagę tę składową tego podgrafu, która zawiera wierzchołek v (należący, powiedzmy, do V_1). Składowa ta jest ścieżką o początku w $v \in V_1$ i krawędziach pokolorowanych kolejno kolorami $c', c, c', \dots$. Ścieżka ta nie może kończyć się w wierzchołku $w \in V_2$; gdyby tak było, to miałaby ona nieparzystą liczbę krawędzi, czyli kończyłaby się krawędzią o kolorze c' , a przecież dla żadnej z takich krawędzi wierzchołek w nie jest wierzchołkiem końcowym. Teraz, na podstawie naszych wcześniejszych spostrzeżeń, możemy w tej składowej zamienić między sobą dwa kolory, otrzymując w dalszym ciągu kolorowanie krawędzi grafu G' za pomocą d kolorów:

np.



Zamieniając kolory, odnosimy następującą korzyść: tym razem brakuje koloru c' przy obu wierzchołkach v i w , możemy zatem pomalować tym kolorem krawędź vw , otrzymując żądane kolorowanie grafu G d kolorami. To kończy dowód przez indukcję. □

Znamy już pewne grafy (takie jak grafy dwudzielne i grafy pełne o parzystej liczbie wierzchołków), dla których indeks chromatyczny jest taki sam jak największy stopień wierzchołka d . Widzieliśmy również przykłady grafów, dla których d kolorów było liczbą niewystarczającą. Ile więc dodatkowych kolorów będzie potrzebnych w takich przypadkach? Okazuje się, że zawsze wystarczy tylko jeden kolor więcej! Zdumiewający jest fakt, że bez względu na to, jaki jest rozważany graf, jeżeli jego największy stopień wierzchołka jest równy d , to krawędzie tego grafu mogą być pokolorowane za pomocą $d + 1$ kolorów. Ten niezwykły wynik został po raz pierwszy udowodniony przez Rosjanina V.G. Vizinga w 1964 r. Przedstawiony tutaj dowód korzysta z następującego lematu.

Lemat: Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o największym stopniu wierzchołka d i niech $e_1, \dots, e_r$ będą pewnymi krawędziami w G , które mają wspólny wierzchołek końcowy v . Załóżmy, że krawędzie grafu $G' = (V, E \setminus \{e_1, \dots, e_r\})$ mogą być pokolorowane za pomocą $D (\geq d)$ kolorów w taki sposób, że co najmniej jeden z kolorów nie występuje w żadnym z końców krawędzi e_1 , co najmniej dwa kolory nie występują w żadnym z końców krawędzi e_2 , co najmniej dwa kolory nie występują w żadnym z końców krawędzi $e_3, \dots$ oraz co najmniej dwa kolory nie występują w żadnym z końców krawędzi e_r . Wówczas krawędzie grafu G można pokolorować D kolorami.

Dowód: Stosujemy indukcję względem r . Przypadek $r = 1$ jest oczywisty, ponieważ przy kolorowaniu grafu G' w opisany sposób, co najmniej jeden kolor nie jest użyty przy obu wierzchołkach końcowych jedynej brakującej krawędzi e_1 ; oczywiście kolor ten może być użyty do pomalowania e_1 , aby uzupełnić kolorowanie krawędzi grafu G .

Założmy więc, że $r > 1$, że wynik jest prawdziwy dla mniej niż r usuniętych krawędzi i że krawędzie grafu G' są pokolorowane, tak jak opisano. Pokażemy,

w jaki sposób pokolorować jedną z tych r krawędzi, przy czym musimy to zrobić w taki sposób, by pozostałe $r - 1$ nie pokolorowane krawędzie w dalszym ciągu spełniały założenia lematu. Weźmy pod uwagę następujące zbiory złożone z pewnych kolorów nie występujących w wierzchołkach końcowych krawędzi e_i :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\text{kolor nie występujący w żadnym z końców } e_1\}, \\ C_2 &= \{\text{dwa kolory nie występujące w żadnym z końców } e_2\}, \\ C_3 &= \{\text{dwa kolory nie występujące w żadnym z końców } e_3\}, \\ &\vdots \\ C_r &= \{\text{dwa kolory nie występujące w żadnym z końców } e_r\} \end{aligned}$$

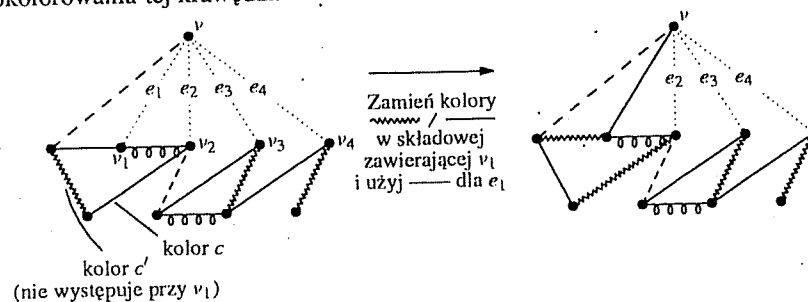
Jeżeli któryś z kolorów należy do dokładnie jednego spośród tych zbiorów, to wówczas można go użyć do pomalowania krawędzi odpowiadającej temu zbiorowi, a następnie usunąć ten zbiór z listy, otrzymując nową sytuację, w której graf G ma tylko $r - 1$ nie pokolorowanych krawędzi, spełniających w dalszym ciągu założenia lematu. Stosując wówczas do tej sytuacji założenie indukcyjne, otrzymujemy, że cały graf G można pokolorować D kolorami.

Ale co zrobić w sytuacji, gdy żaden z kolorów nie jest elementem dokładnie jednego spośród tych zbiorów? Wówczas każdy kolor będący elementem jednego spośród tych zbiorów występuje w co najmniej dwóch zbiorach. Stąd wynika, że liczba różnych kolorów we wszystkich tych zbiorach jest mniejsza bądź równa $\frac{1}{2}(2r - 1)$ i, w szczególności, jest mniejsza od r . Wiemy ponadto, że wierzchołek v ma w grafie G stopień co najwyżej d , a więc przy wierzchołku v występuje w grafie G' co najwyżej $d - r$ kolorów. Stąd

$$\begin{array}{ll} \text{liczba różnych} & \text{liczba różnych} \\ \text{kolorów nie} & \geq D - (d - r) \geq d - (d - r) > \text{kolorów w } r \text{ zbiorach} \\ \text{występujących przy } v & C_1, \dots, C_r \end{array}$$

Tak więc istnieje kolor, powiedzmy c , nie występujący przy wierzchołku v oraz nie będący elementem żadnego z rozważanych zbiorów kolorów. Niech $C_1 = \{c\}$; spójrzmy na podgraf utworzony przez krawędzie koloru c i c' w danym kolorowaniu grafu G' . Tak jak wspomnieliśmy wcześniej, możemy zamienić między sobą te dwa kolory w dowolnej składowej tego podgrafu, otrzymując w dalszym ciągu akceptowalne kolorowanie grafu G' . W szczególności założmy, że krawędź e_1 łączy wierzchołek v z v_1 i zamienimy między sobą dwa kolory c i c' w składowej zawierającej v_1 . Efektem tego przekolorowania jest to, że kolor c nie występuje teraz w żadnym wierzchołku końcowym krawędzi e_1 , a więc można użyć go do

pokolorowania tej krawędzi.

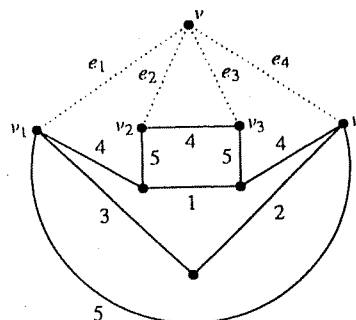


Usuńmy C_1 z listy zbiorów i ustawmy zbiory $C_2, \dots, C_r$ zgodnie z nowym pokolorowaniem. Jaką postać przyjmie to nowe ustawienie? Jedyną konieczną zmianą będzie potrzebna wtedy, kiedy jeden ze zbiorów (powiedzmy C_2) zawiera c' , a kolor c' występuje teraz przy wierzchołku końcowym v_2 krawędzi $e_2 = vv_2$ (co ma miejsce wtedy, kiedy v_1 i v_2 są dwoma „końcami” tej samej c/c' składowej, tak jak w przypadku pokazanym powyżej). Wtedy musimy usunąć c' ze zbioru C_2 . We wszystkich pozostałych sytuacjach nic nie robimy.

W każdym z tych przypadków mamy w konsekwencji pokolorowane wszystkie, z wyjątkiem $r - 1$, krawędzie grafu G . Tych $r - 1$ krawędzi ma w dalszym ciągu wspólny wierzchołek końcowy v , a pierwszej z tych nie pokolorowanych krawędzi odpowiada zbiór składający się z co najmniej jednego koloru, który nie występuje w żadnym z jej końców. Każdej z pozostałych nie pokolorowanych krawędzi odpowiada zaś zbiór zawierający dwa zadane kolory nie występujące w żadnym z końców tej krawędzi. Do tej sytuacji możemy teraz zastosować założenie indukcyjne i otrzymujemy, że krawędzie całego grafu G mogą być pokolorowane za pomocą D kolorów, co kończy dowód lematu. $\square$

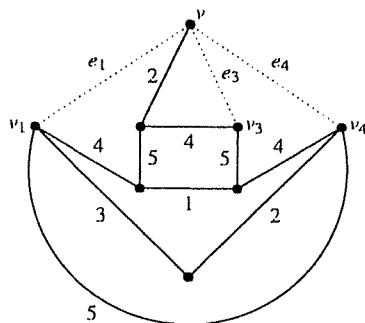
Przykład: Krawędzie niżej przedstawionego grafu zostały częściowo pokolorowane pięcioma kolorami 1–5, przy czym nie pokolorowane krawędzie spełniają założenia lematu. Zastosować technikę powyższego dowodu do pokolorowania krawędzi całego grafu.

Rozwiązanie:



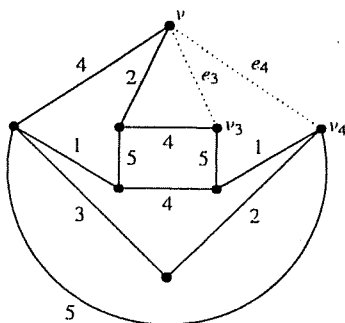
$$\begin{aligned} C_1 &= \{1\} \quad (\text{kolor nie występujący w żadnym z końców } e_1) \\ C_2 &= \{2, 3\} \quad (\text{dwa kolory nie występujące w żadnym z końców } e_2) \\ C_3 &= \{1, 3\} \quad (\text{dwa kolory nie występujące w żadnym z końców } e_3) \\ C_4 &= \{1, 3\} \quad (\text{dwa kolory nie występujące w żadnym z końców } e_4) \end{aligned}$$

Czy któryś z kolorów jest elementem dokładnie jednego z tych zbiorów? Tak, kolor 2 występuje tylko w zbiorze C_2 . Użyjmy tego koloru dla krawędzi e_2 i zaczynajmy od początku:



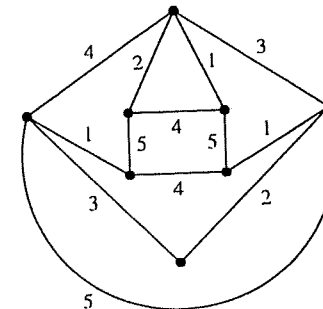
- $C_1 = \{1\}$ (kolor nie występujący w żadnym z końców e_1)
 $C_3 = \{1, 3\}$ (dwa kolory nie występujące w żadnym z końców e_3)
 $C_4 = \{1, 3\}$ (dwa kolory nie występujące w żadnym z końców e_4)

Czy któryś z kolorów jest elementem dokładnie jednego z tych zbiorów? Nie. Wybierzmy więc kolor nie występujący przy wierzchołku v i nie będący elementem żadnego ze zbiorów (wiemy już, że taki kolor zawsze istnieje): w naszym przypadku tym kolorem jest 4. Jako drugi kolor weźmy ten ze zbioru pierwszego, tj. 1. Spójrzmy teraz na podgraf utworzony przez krawędzie koloru 1 i 4. W składowej tego podgrafu, która zawiera wierzchołek v_1 , zamieńmy między sobą kolory 1 i 4. Tak jak widzieliśmy już wcześniej, ta zamiana kolorów w dalszym ciągu pozostawia akceptowalne kolorowanie tego samego zbioru krawędzi, a ponadto „uwalnia” ona kolor 4, który może być użyty do pokolorowania pierwszej krawędzi e_1 . Jednakże zamiana kolorów powoduje, że kolor 1 występuje przy wierzchołku v_4 , a zatem musimy go usunąć ze zbioru C_4 i rozpocząć procedurę od początku. (Przesuwamy również uaktualniony C_4 na pierwsze miejsce listy, gdyż jest on w tym momencie zbiorem jednoelementowym.)



- $C_4 = \{3\}$ (kolor nie występujący w żadnym z końców e_4)
 $C_3 = \{1, 3\}$ (dwa kolory nie występujące w żadnym z końców e_3)

Teraz kolor 1 jest elementem tylko zbioru C_3 , a więc może być użyty do pokolorowania krawędzi e_3 , a pozostały kolor 3 można użyć dla krawędzi e_4 :



Jesteśmy już gotowi udowodnić godne uwagi twierdzenie Vizinga.

Twierdzenie: (Vizinga) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, w którym największy stopień wierzchołka wynosi d . Wówczas krawędzie grafu G można pokolorować przy użyciu $d + 1$ kolorów; tj. $d \leq \chi_e(G) \leq d + 1$.

Dowód: Stosujemy indukcję względem $|E|$, przy czym przypadek $|E| = 0$ jest banalny. Załóżmy więc, że $|E| > 0$ i że teza jest prawdziwa dla grafów o mniejszej liczbie krawędzi. Niech $v \in V$ ma dodatni stopień i niech będzie on wierzchołkiem końcowym dokładnie r krawędzi $e_1 = vv_1, \dots, e_r = vv_r$. Niech G' będzie grafem $(V, E \setminus \{e_1, \dots, e_r\})$. Wówczas największy stopień wierzchołka w G' jest równy co najwyżej d i, na mocy założenia indukcyjnego, krawędzie grafu G' mogą być pokolorowane za pomocą $d + 1$ kolorów: wykonajmy takie pokolorowanie.

W grafie G' stopień każdego z wierzchołków $v_1, \dots, v_r$ jest mniejszy bądź równy $d - 1$, a mamy do dyspozycji $d + 1$ kolorów. W ten sposób dla każdego wierzchołka v_i istnieją co najmniej dwa kolory, które przy nim nie występują, a więc nie występują one również przy obu wierzchołkach końcowych krawędzi e_i . W szczególności jest jeden taki kolor dla krawędzi e_1 oraz dwa kolory dla każdej z pozostałych krawędzi. Zatem, na podstawie lematu (z $D = d + 1$), istnieje sposób pokolorowania krawędzi całego grafu G za pomocą $d + 1$ kolorów, co kończy dowód przez indukcję. $\square$

Zobaczmy teraz pewne uogólnienie twierdzenia Vizinga, które podaje warunek wystarczający (ale nie konieczny) na to, by krawędzie grafu można było pokolorować d kolorami.

Twierdzenie: Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o największym stopniu wierzchołka d (≥ 2), w którym żaden cykl nie składa się w całości z wierzchołków stopnia d w G . Wówczas krawędzie grafu G można pokolorować d kolorami, tj. $\chi_e(G) = d$.

Dowód: Jest zadziwiające, że przedstawiony dowód twierdzenia Vizinga można prawie natychmiast przeformułować tak, aby udowodnić jego uogólnienie. Jak poprzednio, jest to dowód indukcyjny względem $|E|$, przy czym przypadki $|E| \leq 2$

są oczywiste. Załóżmy więc, że $|E| > 2$ i że wynik jest prawdziwy dla grafów o mniejszej liczbie krawędzi. Ponieważ żaden cykl w G nie zawiera wyłącznie wierzchołków stopnia d , zatem istnieje wierzchołek stopnia d , który jest połączony z co najwyżej jednym innym wierzchołkiem stopnia d . Niech $v \in V$ będzie takim wierzchołkiem. Załóżmy, że jest on końcem krawędzi $e_1 = vv_1, \dots, e_d = vv_d$ i niech G' będzie grafem $(V, E \setminus \{e_1, \dots, e_d\})$. Pokażemy najpierw, że krawędzie grafu G' można pokolorować d kolorami.

Największy stopień wierzchołka w G' jest mniejszy bądź równy d : jeżeli jest on mniejszy niż d , to samo już twierdzenie Vizinga gwarantuje, że krawędzie grafu G' można pokolorować d kolorami. Jeżeli zaś największy stopień wierzchołka w G' jest równy d , to w dalszym ciągu jest prawdą, że żaden cykl w G' nie przechodzi wyłącznie przez wierzchołki stopnia d . Możemy zatem do grafu G' zastosować założenie indukcyjne, pokazując ponownie, że można jego krawędzie pokolorować d kolorami. Pokolorujmy więc, w jednym bądź drugim przypadku, krawędzie grafu G' za pomocą d kolorów.

Fakt, że v był połączony w G z co najwyżej jednym wierzchołkiem stopnia d oznacza, iż co najwyżej jeden z wierzchołków $v_1, \dots, v_d$ ma w grafie G stopień d , a pozostałe mają stopień mniejszy bądź równy $d - 1$: jeżeli jeden z tych wierzchołków rzeczywiście ma stopień d w G , to załóżmy, że jest nim v_1 . Wówczas w grafie G' , spośród wierzchołków $v_1, \dots, v_d$, co najwyżej wierzchołek v_1 ma stopień $d - 1$, a pozostałe mają stopień mniejszy bądź równy $d - 2$. Ponieważ kolorując krawędzie grafu G' mamy do dyspozycji d kolorów, zatem istnieje co najmniej jeden kolor nie występujący przy wierzchołku v_1 (czyli nie występujący przy obu końcach krawędzi e_1), a w przypadku każdego z pozostałych wierzchołków v_i istnieją co najmniej dwa kolory nie występujące przy nich (czyli nie występujące przy żadnym z wierzchołków końcowych odpowiadającej krawędzi e_i). Stąd, na podstawie lematu (z $D = d$), istnieje pokolorowanie krawędzi całego grafu G za pomocą d kolorów, co kończy dowód przez indukcję. $\square$

Dowód twierdzenia Vizinga (oraz jego uogólnienie) polegał na rozpatrywaniu każdorazowo jednego wierzchołka, a następnie stosowaniu procedury opisanej w dowodzie lematu, do pokolorowania w każdym kroku dodatkowych krawędzi. W ten sposób przedstawione dowody mogą w rzeczywistości być użyte do opisanego algorytmu kolorującego krawędzie zadanego grafu o największym stopniu wierzchołka d za pomocą $d + 1$ (lub d) kolorów, tak jak przedstawiono to w poprzednim przykładzie. Procedura taka jest opisana obszerniej w książce L. Lovász i M.D. Plummera *Matching theory*. Inne dowody twierdzenia Vizinga wraz z wybranymi pokrewnymi wynikami można znaleźć u takich autorów jak: M. Behzad i C. Chartrand, S. Fiorini i R.J. Wilson, L.W. Beineke i R.J. Wilson, cytowanych w spisie literatury. W tej ostatniej książce grafy, dla których indeks chromatyczny jest równy największemu stopniowi wierzchołka, są nazywane grafami „klasy 1”, a pozostałe „klasy 2”. Chociaż nie jest znana prosta charakterystyka obu tych klas, autorzy ci wskazują na to, że grafy klasy 2 występują „bardzo rzadko”.

W rozdziale 14 powrócimy do zagadnienia kolorowania krawędzi i zobaczymy bardzo bliski związek między kolorowaniem krawędzi a kolorowaniem map.

ZADANIA

1. Pokazać, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$,

$$\chi_e(G) \geq \frac{|E|}{\lfloor \frac{1}{2}|V| \rfloor}$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x .

2. Niech G będzie grafem, w którym każdy wierzchołek z wyjątkiem jednego ma stopień d . Pokazać, że jeżeli można pokolorować krawędzie grafu G za pomocą d kolorów, to

(i) G ma nieparzystą liczbę wierzchołków, [W]

(ii) G ma wierzchołek stopnia zero. [W]

3. Niech G będzie grafem spójnym, w którym każdy wierzchołek ma stopień d . Załóżmy ponadto, że G ma wierzchołek, którego usunięcie (wraz ze wszystkimi dochodzącymi do niego krawędziami) rozspójnia G . Pokazać, że $\chi_e(G) = d + 1$. [W]

4. Niech G będzie grafem hamiltonowskim, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3. Pokazać, że $\chi_e(G) = 3$. [W]

5. W pewnej klasie każdy chłopiec zna dokładnie d dziewcząt i każda dziewczyna zna dokładnie d chłopców. Stosując wynik kolorowania krawędzi, pokazać, że chłopcy i dziewczęta mogą utworzyć „przyjacielskie” pary na co najmniej d różnych sposobów. [W]

6. Niech M będzie macierzą zero-jedynkową wymiaru $m \times n$ z co najwyżej d jedynkami w każdym wierszu i kolumnie. Pokazać, że M może być przedstawiona jako suma d macierzy zero-jedynkowych, z których każda ma co najwyżej jedną jedynkę w każdym wierszu i kolumnie. [W]

Rozpocznemy ten krótki rozdział od uogólnienia małżeńskiej wersji twierdzenia Halla na haremy zakładając, że pewne osoby mogą mieć więcej niż jednego partnera. Następnie rozważymy inny przykład skojarzenia, obserwując „turniej typu każdy z każdym” w pewnym klubie sportowym. Zobaczymy wówczas nieoczekiwany związek między tymi dwoma „światami”, stosując nasz wynik dotyczący haremów do udowodnienia pewnego twierdzenia o turniejach.

W rozdziale 3 poznaliśmy wersję małżeńską twierdzenia Halla, a teraz wyprowadzimy jego nieznaczne uogólnienie. Tradycyjnie w haremie każdy mężczyzna może mieć wiele żon, ale żadna kobieta nie może mieć więcej niż jednego męża. Udowodnimy teraz wersję haremową twierdzenia Halla, odwracając przy tym tę tradycyjną zasadę, to znaczy, pozwalając kobietom mieć swoje haremy.

Twierdzenie: (Twierdzenie Halla — wersja haremowa) Niech $b_1, \dots, b_n$ będą nieujemnymi liczbami całkowitymi i niech $D_1, \dots, D_n$ oznaczać dziewczyny. Dziewczyna D_1 chce mieć b_1 mężów (jak zawsze spośród tych chłopców, których zna), dziewczyna D_2 chce mieć b_2 mężów, $\dots$, i dziewczyna D_n chce mieć b_n mężów. Żaden z chłopców nie może ożenić się z więcej niż jedną dziewczyną. Wszystkie życzenia dziewcząt mogą być spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy dziewczyny z dowolnego podzbioru $D_{i_1}, \dots, D_{i_t}$ znają co najmniej $b_{i_1} + \dots + b_{i_t}$ chłopców.

Dowód: ($\Rightarrow$) Jeżeli wszystkie dziewczyny mogą znaleźć żadaną liczbę mężów, to dziewczyny $D_{i_1}, \dots, D_{i_t}$ (jak zwykle przyjmujemy, że są to różne osoby) muszą znać co najmniej $b_{i_1} + \dots + b_{i_t}$ chłopców, mianowicie swoich mężów.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że dziewczyny z dowolnego podzbioru $D_{i_1}, \dots, D_{i_t}$ znają co najmniej $b_{i_1} + \dots + b_{i_t}$ chłopców. Zamieńmy D_1 na b_1 kopii dziewczyny D_1 , przy czym każda z nich zna tych samych chłopców, których знаła dziewczyna D_1 (dla przykładu, jeżeli $b_1 = 3$, to D_1 zamieniona jest na trzy swoje kopie). Podobnie, zamieńmy D_2 na b_2 kopii $D_2, \dots$ i D_n na b_n kopii D_n , otrzymując:

$$\text{dziewczyny: } \underbrace{D_1 \dots D_1}_{b_1} \underbrace{D_2 \dots D_2}_{b_2} \dots \underbrace{D_n \dots D_n}_{b_n}$$

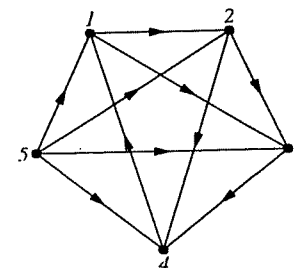
Zastosujemy do tej nowej sytuacji małżeńską wersję twierdzenia Halla, aby znaleźć dla każdej dziewczyny jednego męża. Pokażemy więc, że w tej nowej sytuacji, każde r dziewczyn zna co najmniej r chłopców. Wybierzmy dowolny zbiór spośród „nowych” dziewczyn: powiedzmy, że jest ich r i załóżmy, iż na te r dziewczyn składa się co najmniej jedna „kopia” każdej z dziewczyn $D_{i_1}, \dots, D_{i_t}$. Wówczas oczywiście

$$r \leq b_{i_1} + \dots + b_{i_t}$$

gdyż wartość sumy po prawej stronie jest liczbą, którą otrzymalibyśmy, biorąc wszystkie kopie tych dziewczyn. Teraz zadane warunki stwierdzają, że w wyjściowej sytuacji dziewczyny $D_{i_1}, \dots, D_{i_t}$ znały co najmniej $b_{i_1} + \dots + b_{i_t}$ chłopców (a więc co najmniej r chłopców). Wynika stąd, iż nasz zbiór złożony z r dziewczyn (który zawiera kopie każdej z $D_{i_1}, \dots, D_{i_t}$) w nowej sytuacji zna co najmniej r chłopców. W ten sposób, jako że każde r dziewczyn rzeczywiście zna co najmniej r chłopców, możemy zastosować do tej nowej sytuacji małżeńską wersję twierdzenia Halla, znajdując dla każdej dziewczyny męża. Tak więc, na przykład, każda z b_1 kopii dziewczyny D_1 wyjdzie za mąż: oczywiście wszyscy oni staną się b_1 różnymi mężami dla „kopiowanej” dziewczyny D_1 . Takie postępowanie przypisuje każdej dziewczynie upragnioną liczbę mężów i „haremowe twierdzenie” zostało udowodnione. $\square$

Przejdziemy teraz do świata turniejów. Wyobraźmy sobie pewien turniej dla grupy graczy, polegający na tym, że każdy gra z każdym, przy czym wynikiem pojedynku jest zwycięstwo jednego z dwóch graczy. To prowadzi nas do określenia *turnieju* (wyniku turnieju) z udziałem n graczy (oznaczonych symbolicznie $1, 2, \dots, n$) jako $\binom{n}{2}$ uporządkowanych par zawodników, przy czym dla $1 \leq i < j \leq n$ albo występuje para ij , albo para ji . Te $\binom{n}{2}$ uporządkowane pary mogą być traktowane jako wyniki gier między każdą parą graczy, przy czym pierwsza liczba w danej parze jest zwycięzcą tej gry: w ten sposób będziemy mogli używać normalnego żargonu sportowego. Turniej z udziałem n graczy może być również przedstawiony jako graf pełny K_n , którego wierzchołki oznaczono liczbami $1, 2, \dots, n$ i w którym każda krawędź została skierowana strzałką w jedną z dwóch możliwych stron. Strzałka od i do j oznacza, że „ i pokonał j ”.

Przykład: Na rysunku po prawej stronie przedstawiono turniej, w którym brało udział pięciu graczy $1, 2, 3, 4$ i 5 , połączonych w pary $12, 13, 23, 24, 34, 41, 51, 52, 53$ i 54 . Tak więc w tym turnieju 1 pokonał 2 , 1 pokonał 3 , 2 pokonał 3 , 2 pokonał 4 , 3 pokonał 4 , 4 pokonał 1 , a gracz 5 pokonał wszystkich. $\square$



Przedstawiony graficznie przebieg turnieju jest specjalnym rodzajem „grafu skierowanego” (ta tematyka nie będzie

w tej książce szczegółowo omawiana). *Graf skierowany* (lub *digraf*) $(V, \vec{E})$ składa się, tak jak poprzednio, ze zbioru wierzchołków i zbioru krawędzi (łuków) $\vec{E}$, który jest podzbiorem uporządkowanych par $\{vw : v, w \in V\}$. Graf skierowany możemy pokazać graficznie w ten sam sposób, jak przedstawialiśmy grafy, stosując zamiast krawędzi łuki określające uporządkowanie. Terminologia stosowana w teorii grafów w sposób naturalny rozciąga się na grafy skierowane, na przykład: „skierowany szlak” jest po prostu szlak, który przechodzi się tak jak nakazują strzałki, a „stopień wyjścia/stopień wejścia” danego wierzchołka jest liczbą łuków wychodzących/wchodzących z/do tego wierzchołka itp. W graficznym przedstawieniu turnieju skierowany szlak $p_1, p_2, \dots, p_r$ jest to ciąg graczy, w którym p_1 pokonał p_2 , p_2 pokonał p_3 , ... i p_{r-1} pokonał p_r . W powyższym przykładzie istnieje skierowany szlak 5, 4, 1, 2, 3, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki. Odwołując się do naszych rozważań o grafach hamiltonowskich i semi-hamiltonowskich (rozdział 6), pokażemy teraz, że w turnieju zawsze istnieje skierowany szlak, w którym każdy gracz występuje dokładnie jeden raz: następnie w zadaniach wyznaczmy warunki na istnienie skierowanego cyklu Hamiltona.

Twierdzenie: W dowolnym turnieju z udziałem n graczy można przyporządkować graczom etykiety $p_1, p_2, \dots, p_n$ w ten sposób, że p_1 pokonał p_2 , p_2 pokonał p_3 , ... i p_{n-1} pokonał p_n .

Dowód: Zastosujemy indukcję względem n , przy czym przypadek $n = 2$ (lub $n = 1$) jest oczywisty. Załóżmy więc, że $n > 2$ i że wynik jest prawdziwy dla turniejów z udziałem mniej niż n graczy. Zapomnijmy chwilowo o jednym z graczy, powiedzmy o p , i rozważmy przebieg gier między pozostałymi $n - 1$ graczami. Otrzymujemy obraz pewnego turnieju z udziałem $n - 1$ graczy i, na mocy założenia indukcyjnego, tym graczom możemy przypisać etykiety $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ tak, że

$$p_1 \text{ pokonał } p_2, p_2 \text{ pokonał } p_3, \dots, p_{n-2} \text{ pokonał } p_{n-1}$$

Pomyślmy teraz o możliwych rezultatach dla gracza p . Jeżeli p został pokonany przez wszystkich pozostałych graczy, to będziemy mieli

$$p_1 \text{ pokonał } p_2, p_2 \text{ pokonał } p_3, \dots, p_{n-2} \text{ pokonał } p_{n-1}, p_{n-1} \text{ pokonał } p$$

co ma już żadaną strukturę zawierającą wszystkich graczy turnieju. Jeżeli jednak gracz p pokonał chociaż jednego z pozostałych graczy, to niech i będzie *najmniejszym* indeksem, dla którego p pokonał p_i . Wówczas, jeżeli $i = 1$, mamy

$$p \text{ pokonał } p_1, p_1 \text{ pokonał } p_2, p_2 \text{ pokonał } p_3, \dots, p_{n-2} \text{ pokonał } p_{n-1}$$

a jeżeli $i > 1$, to mamy

$$p_1 \text{ pokonał } p_2, \dots, \underbrace{p_{i-1} \text{ pokonał } p}_{\text{ponieważ } p_i \text{ był pierwszym graczem pokonanym przez } p}, p \text{ pokonał } p_i, \dots, p_{n-2} \text{ pokonał } p_{n-1}$$

ponieważ p_i był pierwszym graczem pokonanym przez p

W obu przypadkach otrzymujemy żądane uporządkowanie wszystkich graczy, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Wiele wyników dotyczących grafów rozciąga się w naturalny sposób na grafy skierowane, na przykład: graf skierowany zawiera skierowany szlak Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy jest on „silnie spójny” (w tym sensie, że z każdego wierzchołka do innego istnieje skierowany szlak) i stopień wyjścia każdego wierzchołka jest równy jego stopniowi wejścia. Zainteresowany czytelnik może dowiedzieć się więcej o grafach skierowanych z książki R.J. Wilsona *Introduction to graph theory*, natomiast dodatkowe informacje o skierowanych cyklach Hamiltona podaje rozdział napisany przez J.-C. Bermonda w *Selected topics in graph theory*. Obie prace zawierają również materiał dotyczący turniejów, o których można także przeczytać w książce J.W. Moona *Topics on tournaments*. Wszystkie te publikacje zostały wymienione w spisie literatury.

Główne twierdzenie związane z turniejami, którym się teraz zajmiemy, dotyczy zbioru możliwych „wyników”. W turnieju z udziałem n graczy $1, 2, \dots, n$ niech b_i oznacza liczbę graczy pokonanych przez gracza i : wówczas $b_1, b_2, \dots, b_n$ są *wynikami* turnieju (a uporządkowana lista tych wyników jest *wektorem wyników*).

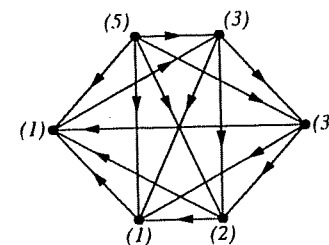
Przykład: Który z następujących ciągów może być wektorem wyników turnieju z udziałem sześciu graczy?

- (i) 4, 4, 4, 2, 1, 1;
- (ii) 5, 3, 3, 2, 1, 1;
- (iii) 5, 4, 4, 1, 1, 0.

Rozwiązanie: (i) Te liczby nie mogą być oczywiście wynikami żadnego turnieju z udziałem sześciu graczy, ponieważ

$$4 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1 = 16 \neq \binom{16}{2}$$

(ii) Oto jest (przedstawiony w graficznej postaci) turniej z zadanymi wynikami. Zauważmy, że w tej graficznej reprezentacji wyniki odpowiadają stopniom wyjścia.



(iii) Chociaż sześć liczb 5, 4, 4, 1, 1, 0 rzeczywiście sumuje się do $\binom{6}{2}$, nie mogą być one wynikami turnieju z udziałem sześciu graczy. Jednym ze sposobów, aby się o tym przekonać, jest rozważenie przebiegu gier między trzema graczami, co do których zakładamy, że ich wyniki będą równe 1, 1 i 0. Tych trzech graczy

zagra między sobą $\binom{3}{2} = 3$ gry, a więc niezależnie od tego, jak są oni słabi, te 3 zwycięstwa muszą być rozdzielone między nich. Tak więc jest niemożliwe, aby ich wyniki sumowały się do liczby mniejszej niż 3. $\square$

Własności ukazane w tych przykładach będą zachodziły dla wyników każdego turnieju z udziałem n graczy, mianowicie wszystkie wyniki będą sumowały się do $\binom{n}{2}$ oraz każde r wyników będzie sumowało się do co najmniej $\binom{n}{2}$ (ponieważ tych r graczy już między sobą zagra taką liczbę gier). Jest nadzwyczajne to, że odwrotne stwierdzenie jest także prawdziwe; tj. jeżeli zbiór n liczb całkowitych ma te dwie własności, to są one wynikami jakiegoś turnieju. Szczegółowy dowód tego rezultatu został po raz pierwszy podany przez H.G. Landaua w 1953 r. w związku z jego pracą poświęconą grupom zwierząt. Dopiero niedawno uświadomiono sobie, że twierdzenie Landaua jest prostą konsekwencją haremowej wersji twierdzenia Halla.

Twierdzenie: (Landaua) Niech $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą liczbami całkowitymi. Liczby te są wynikami pewnego turnieju z udziałem n graczy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(i) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = \binom{n}{2}$$

oraz

$$(ii) \quad \text{dla } 1 \leq r \leq n \text{ każde } r \text{ spośród liczb } b_1, \dots, b_n \text{ sumuje się do co najmniej } \binom{r}{2}.$$

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że istnieje turniej z udziałem n graczy z wynikami $b_1, b_2, \dots, b_n$. Wówczas jest jasne, że suma tych wyników jest równa liczbie wszystkich rozegranych gier, a więc $\binom{n}{2}$. Również dowolnych r graczy rozegrało między sobą $\binom{r}{2}$ gier, czyli muszą oni mieć na swoim wspólnym koncie co najmniej $\binom{r}{2}$ zwycięstw. Konsekwentnie, dowolne r spośród wyników musi sumować się do co najmniej $\binom{r}{2}$. Pokazaliśmy więc, że zachodzą własności (i) oraz (ii).

($\Leftarrow$) Niech teraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą liczbami całkowitymi spełniającymi (i) oraz (ii): wówczas, w szczególności, biorąc $r = 1$, otrzymujemy, iż liczby te są nieujemne. Mając danych dowolnych s spośród tych liczb, powiedzmy $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_s}$, rozważmy pozostałe $n - s$ liczb: będą one sumowały się do co najmniej $\binom{n-s}{2}$, co implikuje, że

$$b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_s} \leq \binom{n}{2} - \binom{n-s}{2}$$

Wyobraźmy sobie teraz, że młode panienki oznaczone symbolicznie $1, 2, \dots, n$ stają do turnieju squasha. Zaoferujmy im jako „nagrody” $\binom{n}{2}$ przystojnych młodych mężczyzn „nazwanych” $'1, 2', '1, 3', \dots, '1, n', '2, 3', '2, 4', \dots, '2, n'$: nagrodą za zwycięstwo w grze między graczami i oraz j będzie chłopiec $'i, j'$. Dziewczyny zapoznają tylko tych chłopców, o których grają. Tak więc, na przykład, dziewczyna „2” zna chłopców $'1, 2', '2, 3', '2, 4', \dots, '2, n'$. Weźmy dowolnych s dziewcząt $i_1, i_2, \dots, i_s$. Ilu chłopców znają one? Spośród wszystkich chłopców nie znają one tylko tych, którzy są znani wyłącznie pozostałym $n - s$ dziewczętom; tj. znają one dokładnie $\binom{n}{2} - \binom{n-s}{2}$ chłopców. W ten sposób, na mocy powyższej nierówności, s dziewcząt $i_1, i_2, \dots, i_s$ zna co najmniej $b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_s}$

chłopców. W konsekwencji, na mocy udowodnionej wcześniej haremowej wersji twierdzenia Halla, dziewczęta $1, 2, \dots, n$ mogą znaleźć odpowiednio $b_1, b_2, \dots, b_n$ mężów spośród chłopców, których znają. Innymi słowy, decyzje o tym czy dziewczyna i , czy też dziewczyna j bierze do swojego haremu chłopca $'i, j'$ mogą być podjęte w taki sposób, że dziewczyna 1 zakończy turniej z b_1 nagrodami, dziewczyna 2 z b_2 nagrodami, ... a dziewczyna n z b_n nagrodami. Oznacza to, że wyniki wszystkich gier w turnieju mogą być ustalone w taki sposób, że liczba nagród zdobytych przez dziewczyny $1, 2, \dots, n$ wynosi odpowiednio $b_1, b_2, \dots, b_n$: liczby te są wówczas wynikami naszego turnieju, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

ZADANIA

1. W turnieju z udziałem n graczy:

- (i) ile jest, możliwych zbiorów wyników takich, że żaden dwaj nie uzyskują tego samego wyniku? [O]
- (ii) ile jest, możliwych zbiorów wyników, takich, że dwaj gracze uzyskują ten sam wynik, a pozostałe wyniki są różne? [O]
- (iii) jaki jest zbiór wyników, jeżeli jeden gracz osiągnął najwyższy wynik, a wszyscy pozostali zajęli ex aequo drugie miejsce? [O]

2. W turnieju z udziałem n graczy, ze zbiorem wyników $b_1, b_2, \dots, b_n$, ile jest zbiorów złożonych z trzech graczy, o tej własności, że każdy gracz z tej trójki wygrał jedną z trzech gier rozegranych między nimi? [W, O]

3. Pokazać, że w turnieju z udziałem n graczy suma dowolnych r wyników wynosi co najwyżej $nr - \binom{r+1}{2}$. [W]

4. Turniej (lub ogólnie graf skierowany) jest *silnie spójny*, jeżeli od dowolnego wierzchołka do każdego innego istnieje skierowany szlak. Pokazać, że w turnieju z udziałem n graczy są równoważne następujące trzy warunki:

- (i) turniej jest silnie spójny;
- (ii) zawiera skierowany cykl Hamiltona;
- (iii) dla $1 \leq r < n$ suma dowolnych r wyników jest większa niż $\binom{r}{2}$. [W]

5. Pokazać, że w turnieju z udziałem n graczy nie będzie skierowanego cyklu wtedy i tylko wtedy, gdy można przyporządkować graczom etykiety $p_1, \dots, p_n$ w taki sposób, że p_i pokonał p_j , jeśli tylko $i < j$ (tzn. p_1 pokonał wszystkich pozostałych, p_2 pokonał wszystkich z wyjątkiem p_1 itd.). Wywnioskować, że w turnieju z udziałem n graczy jest $n!$ sposobów wyboru wyników, dla których nie istnieje skierowany cykl. (Każdy taki turniej z udziałem n graczy jest nazywany „acykliczną orientacją” grafu K_n ; będziemy mieli do czynienia z nimi ponownie w rozdziale 11).

6. (i) Turniej z udziałem n graczy jest rozgrywany każdego kolejnego dnia, przy czym żadnemu z graczy nie wolno rozegrać w danym dniu więcej niż jednego meczu. Jaka jest minimalna liczba dni potrzebna do przeprowadzenia turnieju? [W,O]

(ii) Liga piłkarska składa się z n drużyn. Podczas danego sezonu każda drużyna będzie grała z każdą z pozostałych dwukrotnie. Żadna z drużyn nie gra więcej niż jeden mecz dziennie. Jaka jest najmniejsza liczba dni w sezonie potrzebna na rozgrywki? [O]

9

Twierdzenia minimaksowe

Wyobraźmy sobie, że mamy torebkę ze słodyczami kilku różnych rodzajów. Jaka minimalną liczbę słodyczy należy wyciągnąć z torebki, aby pokazać ile jest w niej rodzajów słodyczy? Jaka jest maksymalna liczba słodyczy, którą można wyciągnąć z torebki, nie wyjmując dwóch tego samego rodzaju? Odpowiedzi są, oczywiście, takie same. Jest to prosty przykład sytuacji, w której pytanie dotyczące minimum prowadzi do tej samej odpowiedzi co inne pytanie dotyczące maksimum: jest to rezultat „minimaksowy”. W tym rozdziale rozważamy trzy niebanalne twierdzenia minimaksowe; jedno dotyczy macierzy, jedno jest z teorii grafów, a ostatnie odnosi się do sieci.

Macierze

Po raz kolejny wykorzystamy tutaj wszechobecne twierdzenie Halla. W swej macierzowej postaci bierze ono pod uwagę macierz zero-jedynkową i szuka w każdym wierszu jednej jedynki tak, że żadne dwie nie należą do tej samej kolumny. Jednakże taki zbiór jedynek może nie istnieć. Wówczas możemy szukać maksymalnej liczby jedynek, z których żadne dwie nie będą w tym samym wierszu lub kolumnie.

Przykłady:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & & & & \\ \boxed{1} & \boxed{0} & & & & \\ \boxed{0} & \boxed{1} & & & & \\ \boxed{0} & \boxed{1} & & & & \\ \boxed{0} & \boxed{0} & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & & & & \\ \boxed{1} & \boxed{0} & & & & \\ \boxed{0} & \boxed{1} & & & & \\ \boxed{0} & \boxed{1} & & & & \\ \boxed{0} & \boxed{0} & & & & \end{pmatrix}$$

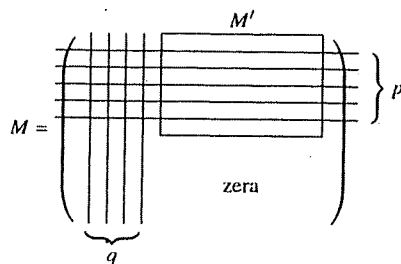
Macierz M_1 spełnia warunek Halla, że w każdych r wierszach występują jedyнки w co najmniej r kolumnach. Zawiera więc zbiór jedynek, spośród których w każdym wierszu znajduje się jedna, a żadne dwie nie są w tej samej kolumnie; jeden taki zbiór wyróżniono pismem półgrubym. Macierz M_2 nie ma jednak takiego zbioru jedynek: można znaleźć maksymalnie tylko cztery jedyнки, z których żadne dwie nie znajdują się w tym samym wierszu lub kolumnie; ponownie jeden z takich układów wyróżniono pismem półgrubym. Na koniec zauważmy, iż jest możliwe wyznaczenie w M_2 czterech „linii” (tj. wierszy lub kolumn), które zawierają wszystkie jedyнки, tak jak pokazano za pomocą prostokątów na rysunku po prawej stronie. W macierzy M_1 pięć wierszy zawiera, oczywiście, wszystkie jedyнки i nie ma mniejszego zbioru „linii” o tej własności. $\square$

Twierdzenie: (Königa-Egerváry’ego) Niech M będzie macierzą zero-jedynkową wymiaru $m \times n$ i niech słowo „linia” oznacza wiersz lub kolumnę macierzy M . Wówczas

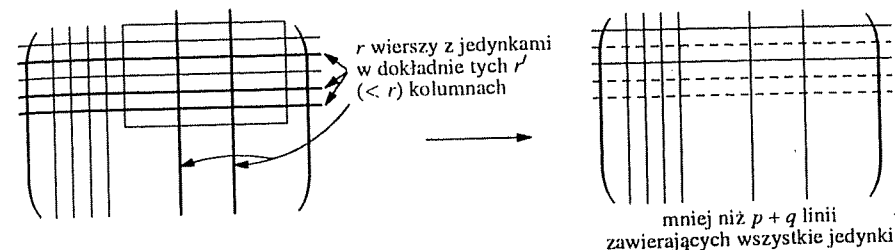
minimalna liczba linii zawierających wszystkie jedyнки macierzy M = maksymalnej liczbie jedynek, z których żadne dwie nie leżą na jednej linii

Dowód: Niech α będzie minimalną liczbą linii w macierzy M zawierających wszystkie jedyнки i niech β będzie maksymalną liczbą jedynek w M , z których żadne dwie nie leżą na jednej linii. Ponieważ jest β jedynek, z których żadne dwie nie leżą na tej samej linii, więc oczywiście potrzebujemy co najmniej β linii, zawierających te jedyнки; stąd $\alpha \geq \beta$.

Aby pokazać, że $\beta \geq \alpha$, wyznaczmy α jedynek, z których żadne dwie nie leżą na jednej linii. Przyjmijmy, że $\alpha = p + q$, gdzie (nie tracąc na ogólności) zakładamy, że pierwszych p wierszy i pierwszych q kolumn macierzy M zawiera wszystkie jedyнки z M .

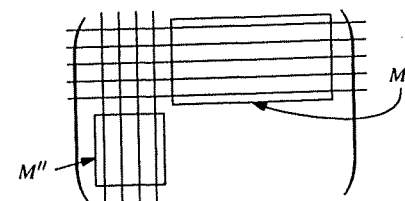


Spójrzmy na macierz M' . Twierdzimy, że dowolnych r wierszy tej macierzy zawiera jedyнки w co najmniej r kolumnach. Rzeczywiście, gdyby tak nie było, to w M' istniałoby r wierszy z jedyнками występującymi w dokładnie r' kolumnach, gdzie $r' < r$.



Ale wówczas, zastępując odpowiednie r wiersze w M tymi r' kolumnami, otrzymalibyśmy mniejszy zbiór linii zawierających wszystkie jedyнки w M , co nie jest możliwe. W ten sposób dowolnych r wierszy macierzy M' rzeczywiście zawiera jedyнки w co najmniej r kolumnach. W konsekwencji, na mocy macierzowej postaci twierdzenia Halla (strona 41), M' zawiera zbiór złożony z p jedynek, po jednej w każdym wierszu, i z których żadne dwie nie są w tej samej kolumnie.

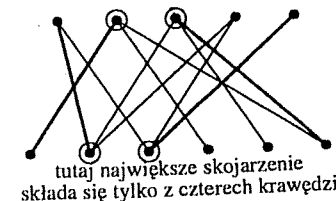
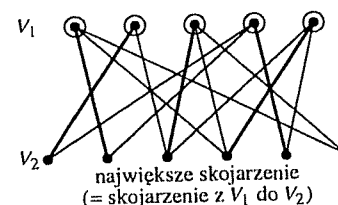
Pokazaliśmy, że istnieje p jedynek w macierzy M' , z których żadne dwie nie leżą na jednej linii. Podobnie, istnieje q jedynek w macierzy M'' , z których żadne dwie nie leżą na jednej linii. Ogólnie więc daje to, oczywiście, $p + q (= \alpha)$ jedynek w M , z których żadne dwie nie leżą na tej samej linii. Ponieważ β jest maksymalną liczbą takich jedynek, wynika stąd, że $\alpha \leq \beta$, i twierdzenie zostało udowodnione. $\square$



Grafy

Skojarzenie w grafie jest to zbiór krawędzi, z których żadne dwie nie mają wspólnego wierzchołka końcowego. Spotkaliśmy się już z pojęciem „skojarzenia z V_1 do V_2 ” w grafie dwudzielnym $G = (V_1, E, V_2)$: jeżeli skojarzenie takie istnieje, to jest oczywiste, że G nie zawiera skojarzenia o większej liczbie krawędzi. Jednakże dwudzielny graf $G = (V_1, E, V_2)$ może nie mieć skojarzenia z V_1 do V_2 . W tym przypadku jego największe skojarzenie będzie miało mniej niż $|V_1|$ krawędzi.

Przykłady:



W przykładzie po lewej stronie pięć wierzchołków oznaczonych kółkami (które tworzą V_1) spełnia, oczywiście, własność, że dla każdej krawędzi grafu co najmniej jeden z nich jest wierzchołkiem końcowym: żaden zbiór mający mniej niż pięć wierzchołków o tej własności nie istnieje. W przykładzie po stronie prawej cztery wierzchołki oznaczone kółkami stanowią najmniejszy zbiór, w którym jest zawarty co najmniej jeden wierzchołek końcowy każdej krawędzi grafu. $\square$

Prowadzi nas to do następnego twierdzenia minimaxowego. Czytelnicy o sokolim wzroku zauważą istotny związek między tym a poprzednim przykładem dotyczącym macierzy. W rzeczywistości następujący rezultat jest właściwie przeformułowaniem twierdzenia Königa-Egerváry'ego w teoriografowej terminologii: jego dowód pozostawiamy jako jedno z zadań na końcu tego rozdziału.

Twierdzenie: Niech $G = (V_1, E, V_2)$ będzie grafem dwudzielnym. Wówczas

$$\begin{array}{l} \text{minimalna liczba wierzchołków,} \\ \text{wśród których jest co najmniej} \\ \text{jeden koniec każdej krawędzi} \end{array} = \begin{array}{l} \text{maksymalnej liczbie} \\ \text{krawędzi w skojarzeniu} \end{array}$$

 $\square$

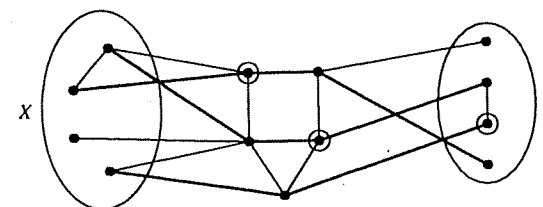
Oba powyższe rezultaty spełniają ważną rolę w pewnych zastosowaniach. Choćby wykraczają one poza ramy tej książki, warto o nich krótko wspomnieć, by zainteresowany czytelnik mógł poszerzyć swoją wiedzę. W podręczniku *A first course in combinatorial mathematics* I. Anderson pokazuje kluczową rolę twierdzenia Königa-Egerváry'ego w algorytmicznej metodzie rozwiązywania „problemu optymalnego przydziału”, rozdzielającego stanowiska pracy pomiędzy kandydatów w najlepszy możliwy sposób. W rozdziale D.R. Woodalla w *Selected topics in graph theory* (który jest interesującym przeglądem twierdzeń minimaxowych) autor opisuje *algorytm węgierski*, znajdujący największe skojarzenie w grafie dwudzielnym: metoda ta (nazwana tak ze względu na narodowość Königa i Egerváry'ego) jest niczym innym jak algorytmicznym dowodem twierdzenia Halla, który zastosowaliśmy w rozdziale 3. Woodall pokazuje również, jak metoda ta rozciąga się na przypadek „z wagami”, który następnie może być użyty do rozwiązania problemu optymalnego przydziału.

Inną interpretacją ostatniego twierdzenia dotyczącego grafu dwudzielnego, jest ta, że w pewnym sensie maksymalna liczba rozłącznych ścieżek z V_1 do V_2 równa się minimalnej liczbie wierzchołków, których usunięcie rozdziela V_1 od V_2 . Jest godne uwagi, że następne twierdzenie udowodnione po raz pierwszy przez K. Menger'a w 1927 r. pokazuje, iż to samo jest prawdą dla dowolnych dwóch zbiorów wierzchołków każdego grafu.

Zbiór ścieżek w grafie $G = (V, E)$ jest *rozłączny*, jeżeli żadne dwie z nich nie mają wspólnego wierzchołka. Ścieżka prowadząca od zbioru wierzchołków X do zbioru wierzchołków Y jest po prostu ścieżką, której pierwszy wierzchołek jest

w X , a ostatni w Y . Kiedy szukamy największego z możliwych zbiorów rozłącznych ścieżek z X do Y , powinniśmy, oczywiście, szukać najbardziej ekonomicznych i skupić uwagę na tych ścieżkach, których pierwszy wierzchołek jest *jedynym* w X , a ostatni wierzchołek jest *jedynym* w Y . Z drugiej strony zbiór wierzchołków S *rozdziela* X od Y , jeżeli każda ścieżka z X do Y przechodzi przez wierzchołek z S : same zbiory X i Y mają oczywiście taką własność, ale często istnieją zbiory mniejsze od nich.

Przykład: W przedstawionym grafie mamy maksymalnie trzy rozłączne ścieżki z X do Y (jeden taki układ wyróżniono liniami półgrubymi). Również potrzebne są minimum trzy wierzchołki, których usunięcie rozdziela X od Y (jeden z tych zbiorów oznaczono kółkami).

 $\square$

Twierdzenie: (Menger'a) Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem i niech $X, Y \subseteq V$. Wówczas

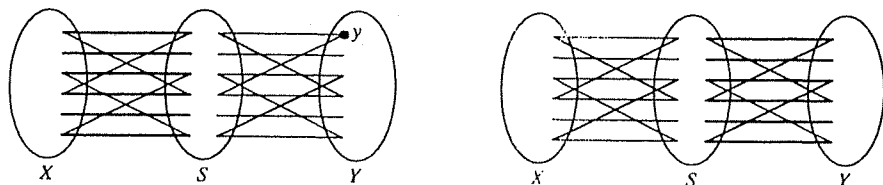
$$\begin{array}{l} \text{minimalna liczba wierzchołków,} \\ \text{które rozdziela X od Y} \end{array} = \begin{array}{l} \text{maksymalnej liczbie} \\ \text{rozłącznych ścieżek z X do Y} \end{array}$$

Dowód: Niech α będzie najmniejszą liczbą wierzchołków, które rozdziela X od Y , i niech β będzie największą liczbą rozłącznych ścieżek z X do Y . Jak zwykle w twierdzeniach minimaxowych, jedna z nierówności między α a β jest oczywista: jeżeli zbiór wierzchołków rozdziela X od Y , to musi on zawierać co najmniej jeden wierzchołek każdej z β rozłącznych ścieżek, a więc $\alpha \geq \beta$.

Dowód odwrotnej nierówności wykorzystuje indukcję względem $|V| + |E|$, przy czym przypadek $|V| + |E| = 1$ jest oczywisty. Załóżmy więc, że dla grafu G zachodzi $|V| + |E| > 1$ i że twierdzenie jest prawdziwe dla mniejszych grafów: aby pokazać, że dla G , $\beta \geq \alpha$, skonstruujemy α rozłącznych ścieżek z X do Y . Rozpatrujemy dwa przypadki:

Przypadek 1: Istnieje zbiór S o α wierzchołkach, który rozdziela X od Y , i taki, że $S \neq X$ oraz $S \neq Y$. (Przypadek 2 będzie dotyczył wszystkich pozostałych sytuacji.) Jako że Y , sam w sobie, rozdziela X od Y , oraz S jest najmniejszym takim zbiorem, więc $Y \not\subseteq S$. W tym przypadku wiemy również, że $S \neq Y$, a więc $Y \not\subseteq S$, czyli istnieje wierzchołek $y \in Y \setminus S$. Wystarczy chwila zastanowienia, by dojść do wniosku, że S jest najmniejszym zbiorem wierzchołków, który rozdziela

X od S . Jest to nie tylko prawdą w grafie G . Własność ta zachodzi również w grafie otrzymanym z G przez usunięcie wierzchołka y .



W ten sposób, na mocy założenia indukcyjnego, w tym mniejszym grafie istnieje α rozłącznych ścieżek z X do S , które będą w dalszym ciągu rozłącznymi ścieżkami w grafie G . Podobne rozumowanie pokazuje, że w grafie G istnieje α rozłącznych ścieżek z S do Y . Oczywiście ścieżki z X do S mogą być złączone razem ze ścieżkami z S do Y , dając żądanych α rozłącznych ścieżek z X do Y .

Przypadek 2. Jeżeli przypadek 1 nie zachodzi, to jedynym możliwym zbiorem α wierzchołków, rozdziałającym X od Y , będzie któryś ze zbiorów X lub Y (albo oba): założmy, że $|X| = \alpha$. Jeżeli $X \subseteq Y$, to łatwo można skonstruować α trywialnych, rozłącznych ścieżek z X do Y , z których każda składa się z pojedynczego wierzchołka. Załóżmy zatem, że $v \in X \setminus Y$, i rozważmy zbiór wierzchołków $X \setminus \{v\}$. Ponieważ ma on mniej niż α elementów, nie może więc rozdzielać X od Y : w konsekwencji istnieje ścieżka z X do Y , której pierwszymi wierzchołkami są $v, w, \dots$. Rozważmy teraz graf $G' = (V, E \setminus \{vw\})$. Jeżeli X jest w dalszym ciągu minimalnym zbiorem rozdziałającym w G' , to na mocy założenia indukcyjnego istnieje w G' (a więc również w G) α rozłącznych ścieżek z X do Y . Z drugiej strony, jeżeli istnieje jakiś zbiór S' składający się z $\alpha - 1$ wierzchołków, który w G' rozdziela X od Y , to jest jasne, że oba zbiory $S' \cup \{v\}$ i $S' \cup \{w\}$ rozdziela w grafie G zbiór X od Y i że oba zawierają α wierzchołków. Ale w przypadku 2 jedynymi możliwymi takimi zbiorami są same X i Y . W ten sposób

$$\begin{array}{ccc} S' \cup \{v\} = X & & S' \cup \{w\} = Y \\ \uparrow & \text{ i } & \uparrow \\ \in X \setminus Y & & \notin X \end{array}$$

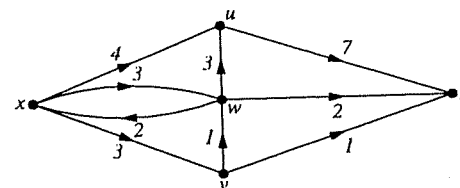
Wówczas jednak $\alpha - 1$ trywialnych ścieżek składających się z pojedynczego wierzchołka z S' , wraz ze ścieżką v, w tworzą α rozłącznych ścieżek z X do Y . W ten sposób w każdym przypadku istnieje α rozłącznych ścieżek od X do Y : a ponieważ β była maksymalną liczbą takich ścieżek, zatem mamy $\beta \geq \alpha$. To, wraz z przeciwną nierównością ustanowioną wcześniej, daje $\alpha = \beta$ i twierdzenie Mengera zostało udowodnione. $\square$

Sieci

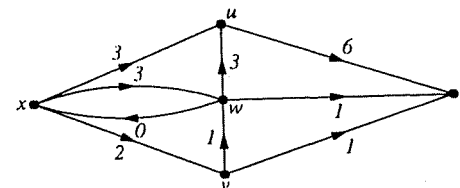
Siec $N = (V, c)$ jest niepustym zbiorem wierzchołków V takim, że każdej uporządkowanej parze wierzchołków $v, w \in V$ jest przyporządkowana nieujemna liczba rzeczywista $c(vw)$, zwana przepustowością krawędzi vw (tak więc c jest funkcją

z $V \times V$ do $\{x \in R : x \geq 0\}$). Nie zagłębiając się w terminologię grafów skierowanych, jeżeli $c(vw) > 0$, to możemy traktować vw jako krawędź (łuk) z v do w i przedstawić sieć w ten sam sposób, jak przedstawiamy graf, zaznaczając przepustowość krawędzi, lecz zupełnie ignorując krawędzie o przepustowości zero. Ponieważ nie badamy sieci w sposób bardzo szczegółowy, uprościmy sobie rozważania, przyjmując całkiem naturalne założenie, iż wszystkie przepustowości są liczbami całkowitymi oraz że $c(vv) = 0$ dla każdego wierzchołka v .

Przykład: Niech $N = (V, c)$ będzie siecią taką, że $V = \{u, v, w, x, y\}$ oraz $c(uy) = 7$, $c(vw) = 1$, $c(vy) = 1$, $c(wu) = 3$, $c(wx) = 2$, $c(wy) = 2$, $c(xu) = 4$, $c(xv) = 3$, $c(xw) = 3$, a wszystkie pozostałe przepustowości są zerem.

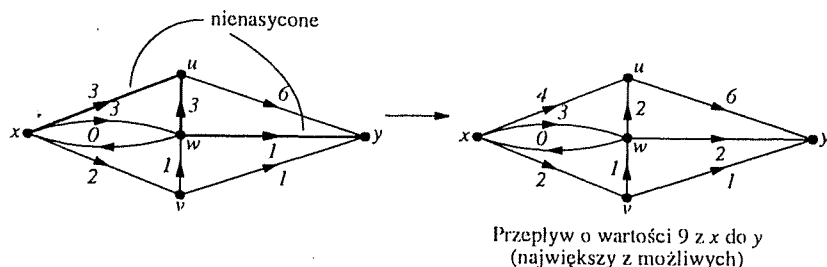


Możemy wyobrazić sobie, że krawędzie są rurami, w których przepływ jest dozwolony w zadanym kierunku, nie przekraczając podanych przepustowości. Wówczas możemy wyznaczyć rozmaite „przepływy” przez powyższą sieć, na przykład:

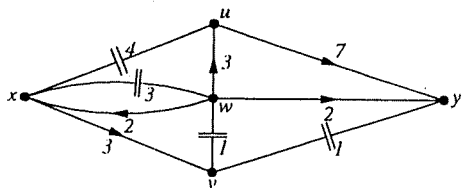


Pokazany na tym przykładzie „przepływ o wartości 8” z x do y ma kilka kluczowych własności: w x wpływa do sieci (w pewnym oczywistym sensie) całkowity przepływ o wartości 8, a w y wypływa z sieci całkowity przepływ o wartości 8. Przez każdy z pozostałych wierzchołków nie przechodzi całkowity przepływ, ale dla każdego z nich rzeczywista ilość „wplywu” jest równa rzeczywistej ilości „wypływu”. Co więcej, przepływ przez każdą krawędź w żadnym przypadku nie przekracza przepustowości danej krawędzi. Przedstawiony przepływ z x do y nie jest jednak największym z możliwych. Zauważmy, że jeżeli przechodzi się w sieci z x do y wzdłuż drogi x, u, w, y , to na każdym etapie albo idzie się w „dobrym kierunku” wzdłuż „nienasyconej” krawędzi (tj. w której rzeczywisty przepływ jest mniejszy od jej przepustowości), albo idzie się w „złym kierunku”, wzdłuż krawędzi, w której mamy rzeczywisty przepływ. Takie przejście nazywa się „ścieżką

powiększającą przepływ”, bo jeżeli zwiększy się w krawędziach, które się przeszło we właściwym kierunku, przepływ o 1 oraz zmniejszy o 1 przepływ w krawędziach, które się przeszło w złym kierunku, to otrzyma się wówczas nowy przepływ w sieci, przy czym całkowity przepływ z x do y zwiększa się o 1:



Powracając do wyjściowej sieci, zauważmy, że „przecinając” niektóre z krawędzi można, oczywiście, zatrzymać wszystkie przepływy z x do y . Dla przykładu najprostszymi cięciami, które można wykonać, są cięcia wszystkich krawędzi wychodzących z x , mianowicie xv, xw oraz xu : suma ich przepustowości wynosi $3 + 3 + 4 = 10$. Jednakże, można też zatrzymać wszystkie przepływy z x do y , przecinając krawędzie o mniejszej, całkowitej przepustowości niż powyższa: zbiór krawędzi xw, xu, vw oraz vy ma całkowitą przepustowość $3 + 4 + 1 + 1 = 9$ i jeżeli przetnie się je, to oczywiście, zostanie zatrzymany cały przepływ z x do y . Co więcej, żaden inny zbiór „przecinających krawędzi”, o mniejszej całkowitej przepustowości, nie zatrzyma przepływu z x do y .



Dokładniej mówiąc, dla danej sieci $N = (V, c)$ przepływ przez krawędź vw jest to liczba $f(vw)$ spełniająca nierówność $0 \leq f(vw) \leq c(vw)$: można sobie to wyobrazić jako przepływ cieczy przez rurę vw , z v do w , który nie może przekroczyć przepustowości tej rury. (Ponownie ograniczymy naszą uwagę do przypadków, gdy $f(vw)$ jest liczbą całkowitą.) Jeżeli wszystkie przepływy przez krawędzie spełniają

- (i) przepływ przez każdą krawędź wchodzącą do x ma wartość zero,
- (ii) w każdym wierzchołku v , oprócz x i y , całkowity przepływ przez krawędzie wchodzące do v równa się całkowitemu przepływowi przez krawędzie wychodzące z v , oraz
- (iii) przepływ przez każdą krawędź wychodzącą z y ma wartość zero,

to funkcja f (działająca z $V \times V$ do zbioru nieujemnych liczb całkowitych) nazywa się *przepływem z x do y* w sieci: ponadto x nazywa się *źródłem* przepływu, a y *ujściem*. Mając dany taki przepływ f , łatwo można zauważyć, że całkowity przepływ przez krawędzie wychodzące z x jest taki sam, jak całkowity przepływ przez krawędzie wchodzące do y : liczba ta nazywa się *wartością przepływu*. Między dowolnymi dwoma wierzchołkami w sieci zawsze istnieje trywialny przykład przepływu o wartości zero, w którym przepływ w każdej krawędzi wynosi zero.

Przekrój w $N = (V, c)$ rozdzielający x od y jest to zbiór krawędzi, których usunięcie pozostawia sieć nie mającą nietrywialnych przepływów z x do y . *Przepustowość przekroju* jest sumą przepustowości wszystkich krawędzi należących do przekroju.

W powyższym przykładzie przepływu z x do y miały największą wartość równą 9, która pokrywała się z najmniejszą przepustowością przekroju i, oczywiście, nie był to zbieg okoliczności: ogólny wynik, znany jako twierdzenie o „maksymalnym przepływie-minimalnym przekroju”, został po raz pierwszy udowodniony przez L.R. Forda i D.R. Fulkersona w 1956 r.

Twierdzenie: (Maksymalny przepływ-minimalny przekrój) Między dowolnymi dwoma wierzchołkami x oraz y należącymi do sieci

$$\begin{array}{l} \text{minimalna przepustowość przekroju,} \\ \text{który rozdziela } x \text{ od } y \end{array} = \begin{array}{l} \text{maksymalnej wartości} \\ \text{przepływu z } x \text{ do } y \end{array}$$

Dowód: Niech $N = (V, c)$ będzie siecią, niech α będzie minimalną przepustowością wszystkich możliwych przekrojów, które w sieci N rozdzielają x od y i niech β będzie maksymalną wartością wszystkich możliwych przepływów z x do y . Jeżeli przekrój ma przepustowość k , to usunięcie tych krawędzi zatrzymuje cały przepływ z x do y : stąd każdy przepływ, który jest możliwy po przywróceniu tych krawędzi, musi mieć wartość mniejszą bądź równą k . Tak więc wartość *każdego* przepływu jest mniejsza bądź równa przepustowości *każdego* przekroju. W szczególności wartość „maksymalnego przepływu” jest mniejsza bądź równa przepustowości „minimalnego przekroju”; tj. $\beta \leq \alpha$.

Aby pokazać, że $\alpha \leq \beta$, udowodnimy metodą indukcji względem n , że dla $0 \leq n \leq \alpha$ istnieje przepływ o wartości n . W szczególności pokaże to, że istnieje przepływ o wartości α i że β (wartość maksymalnego przepływu) jest większa bądź równa α .

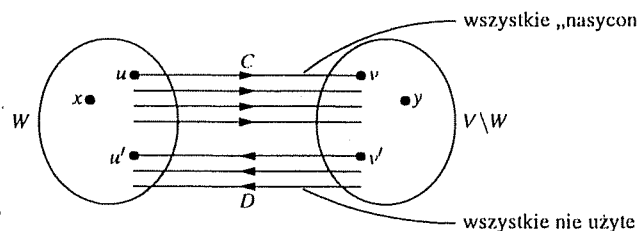
Oczywiście istnieje przepływ o wartości zero. Załóżmy, że $0 \leq n < \alpha$ i że dany jest przepływ f o wartości n . Pokażemy, że istnieje przepływ mający wartość $n + 1$. Niech W będzie zbiorem wierzchołków w , dla których istnieje „ścieżka powiększająca przepływ” z x do w ; tj. ciąg wierzchołków

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m = w$$

mający własność, że dla każdego i , gdzie $0 \leq i < m$

albo $f(x_i x_{i+1}) < c(x_i x_{i+1})$ albo $f(x_{i+1} x_i) > 0$
 (poruszamy się w „dobrym kierunku” i krawędź $x_i x_{i+1}$ jest „nienasycona”) (poruszamy się w „złym kierunku” i ma miejsce rzeczywisty przepływ przez krawędź $x_{i+1} x_i$)

Twierdzimy, że $y \in W$. Załóżmy, że tak nie jest i rozważmy zbiory wierzchołków W (zawierający x) oraz $V \setminus W$ (zawierający y). Niech C będzie zbiorem krawędzi skierowanych od W do $V \setminus W$ i niech D będzie zbiorem krawędzi skierowanych od $V \setminus W$ do W . Jest jasne, że zbiór krawędzi C tworzy przekrój rozdzielający x od y .



Z definicji zbioru W wynika, że jest niemożliwe przejście z wierzchołka zbioru W do wierzchołka zbioru $V \setminus W$ wzdłuż ścieżki powiększającej przepływ. Stąd każda krawędź uv należąca do C ma przepływ $f(uv) = c(uv)$ a każda krawędź $v'u'$ należąca do D ma przepływ $f(v'u') = 0$. Wartość rozpatrywanego przepływu (która wynosi n oraz jest mniejsza od α) równa się, oczywiście, całkowitemu przepływowi z W do $V \setminus W$, który jest równy całkowitej przepustowości krawędzi należących do C . Wynika stąd więc, że C jest przekrojem o przepustowości mniejszej niż α , co przeczy minimalności α . Ta sprzeczność pokazuje, że $y \in W$, tak jak twierdziliśmy.

W konsekwencji, na mocy definicji zbioru W , istnieje ścieżka powiększająca przepływ z x do y ; tj. ciąg wierzchołków

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m = y$$

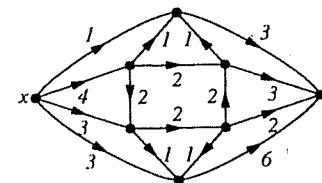
mający własność, że dla każdego i , gdzie $0 \leq i < m$, albo $f(x_i x_{i+1}) < c(x_i x_{i+1})$, albo $f(x_{i+1} x_i) > 0$. Zmienimy teraz przepływ wzdłuż krawędzi ścieżki powiększającej przepływ w następujący sposób:

jeżeli $f(x_i x_{i+1}) < c(x_i x_{i+1})$: lub jeżeli $f(x_{i+1} x_i) > 0$:
 dla wszystkich krawędzi $x_i x_{i+1}$ tego typu zwiększyć przepływ o 1 dla wszystkich krawędzi $x_{i+1} x_i$ tego typu zmniejszyć przepływ o 1

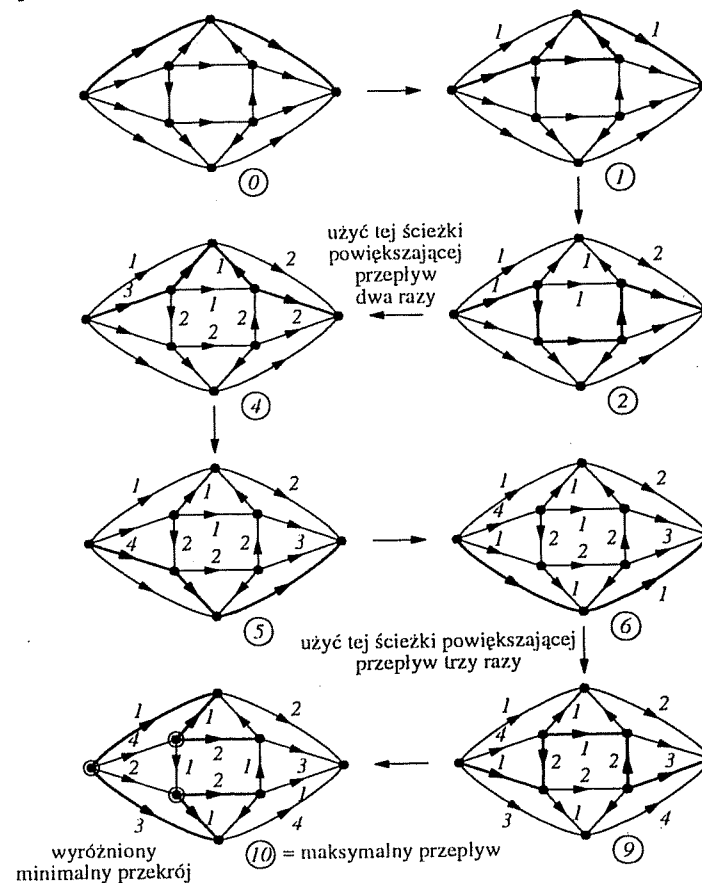
Łatwo można sprawdzić, że to daje nowy przepływ f' z x do y o wartości $n+1$. Udowodniliśmy więc przez indukcję, że istnieją przepływy o wszystkich wartościach od 0 do α . W szczególności, jak już wspomnieliśmy wcześniej, istnienie przepływu mającego wartość α pokazuje, że $\beta \geq \alpha$. Stąd $\alpha = \beta$ i twierdzenie „maksymalny przepływ-minimalny przekrój” jest udowodnione. $\square$

Dowód ten był algorytmiczny w tym sensie, że mając dane dwa wierzchołki w sieci, możemy zastosować tę metodę do znalezienia maksymalnego przepływu (i minimalnego przekroju).

Przykład: Znaleźć maksymalny przepływ z x do y w przedstawionej sieci.



Rozwiązanie: Rozpoczynamy zerowym przepływem i w każdym przypadku (aż do końca) pokazujemy ścieżkę powiększającą przepływ, która jest następnie użyta przy przejściu do kolejnego rysunku:



Nie ma już więcej ścieżek powiększających przepływ z x do y : zbiór W (określony w dowodzie) jest zaznaczony na ostatnim rysunku kółkami. Tak więc maksymalny przepływ wynosi 10, a minimalny przekrój o wartości 10 jest utworzony przez krawędzie z W do $V \setminus W$, tak jak to wyróżniono pismem półgrubym. $\square$

To kończy nasze rozważania o twierdzeniach minimaksowych, jednak warto zwrócić uwagę na to, iż omawiane przez nas twierdzenia (i jeszcze inne, których nie omawialiśmy) są pokrewne. Na przykład zastosowaliśmy twierdzenie Halla do udowodnienia twierdzenia Königa-Egerváry'ego, które było szczególnym przypadkiem twierdzenia Menger'a, a twierdzenie „maksymalny przepływ-minimalny przekrój” jest, w pewnym sensie, uogólnioną krawędziową postacią twierdzenia Menger'a. We wstępnym kursie niewłaściwe byłoby przytaczanie zbyt wielu skomplikowanych przykładów, natomiast w zadaniach zobaczymy jeszcze kilka innych, prostych związków, dotyczących omawianych twierdzeń. Ponadto obszerny zakres materiału na ten temat zainteresowany czytelnik znajdzie w książce P.F. Reichmeidera *The equivalence of some combinatorial matching theorems*.

ZADANIA

- Niech $G = (V_1, E, V_2)$ będzie grafem dwudzielnym. Stosując twierdzenie Königa-Egerváry'ego, pokazać, że
minimalna liczba wierzchołków,
wśród których jest co najmniej jeden koniec każdej krawędzi = maksymalnej liczbie krawędzi w skojarzeniu [W]

- Niech $G = (V_1, E, V_2)$ będzie grafem dwudzielnym i dla każdego $W \subseteq V_1$ niech $j(W)$ będzie zbiorem wierzchołków (w V_2), które są połączone z co najmniej jednym elementem z W . Pokazać, że maksymalna liczba krawędzi w skojarzeniu w grafie G wynosi

$$\min_{W \subseteq V_1} \{|V_1| - |W| + |j(W)|\} \quad [W]$$

- Wyprowadzić z twierdzenia Königa-Egerváry'ego twierdzenie Halla. [W]

- (Krawędziowa postać twierdzenia Menger'a). Niech $G = (V, E)$ będzie grafem i niech x i y będą wierzchołkami w G . Zbiór ścieżek z x do y jest *krawędziowo-rozłączny*, gdy żadna z krawędzi nie została użyta w więcej niż jednej z tych ścieżek, a zbiór krawędzi *rozdziela* x od y , jeżeli każda ścieżka z x do y przechodzi przez co najmniej jedną z tych krawędzi. Zastosować twierdzenie „maksymalny przepływ-minimalny przekrój”, aby pokazać, że maksymalna liczba krawędziowo-rozłącznych ścieżek z x do y równa się minimalnej liczbie krawędzi, które rozdzielają x od y . [W]

10

Rekurencja

W rozdziale tym powracamy do idei zliczania różnych kombinacji i wyborów obiektów, ale tym razem zamiast stosować bezpośrednie argumenty, będziemy wyprowadzać nasze wyniki stopniowo, rozpoczynając od najprostszych sytuacji.

Przykład: Słynny ciąg Fibonacciego to 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., w którym po zadaniu pierwszych dwóch wyrazów, dalsze są otrzymywane przez dodanie dwóch poprzedzających je wyrazów; tj.

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad \text{ i } \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n > 1)$$

Zależności te jednoznacznie definiują ciąg i umożliwiają wyznaczenie dowolnie określonego wyrazu. Ponadto jeżeli przypuszczamy, że mamy jakiś wzór określający F_n , to sprawdzając jedynie, czy spełnia on powyższe zależności, można wnioskować o jego poprawności. Na przykład zadaniem jest pokazanie, że wzór

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

spełnia te zależności, a więc jest poprawnym wzorem dla F_n . Nie wiemy jednak jeszcze, w jaki sposób zależności te mogą nas doprowadzić do takiego wzoru. $\square$

Przykład: W rozdziale 1 poznaliśmy trójkąt Pascala:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & & & &
 \end{array}$$

Oznaczmy wyraz w pierwszym rzędzie przez p_{00} , te w następnym przez p_{10}, p_{01} , w kolejnym przez p_{20}, p_{11}, p_{02} , i tak dalej, otrzymując ogólny rząd w postaci

$$p_{n0}, p_{(n-1)1}, p_{(n-2)2}, \dots, p_{0n}$$

Stosując notację silni, oczywiście, wiemy już jak wygląda każdy wyraz. Wyobraźmy sobie jednak, że jest dana tylko trójkątna tablica Pascala i należy znaleźć wzór na p_{jk} . Nie jest to wcale takie łatwe, ale co jest oczywiste, to sposób, w jaki został zdefiniowany ten model. Po wstawieniu w dwóch zewnętrznych liniach jedynek, dowolny wyraz jest otrzymany przez dodanie dwóch wyrazów stojących bezpośrednio nad nim; tj.

$$p_{n0} = 1 \quad p_{0n} = 1 \quad i \quad p_{jk} = p_{(j-1)k} + p_{j(k-1)} \quad (j, k > 0)$$

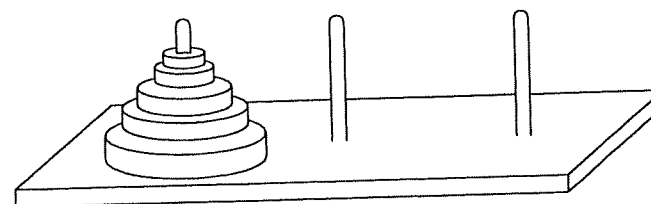
Zależności te wyznaczają jednoznacznie każdy element trójkąta i umożliwiają określenie dowolnie zadanego wyrazu. Na przykład

$$p_{22} = p_{12} + p_{21} = \underbrace{(p_{02} + p_{11})}_{1 \quad 1} + \underbrace{(p_{11} + p_{20})}_{1 \quad 1} = 2 + 2p_{11} = 2 + 2(p_{01} + p_{10}) = 6$$

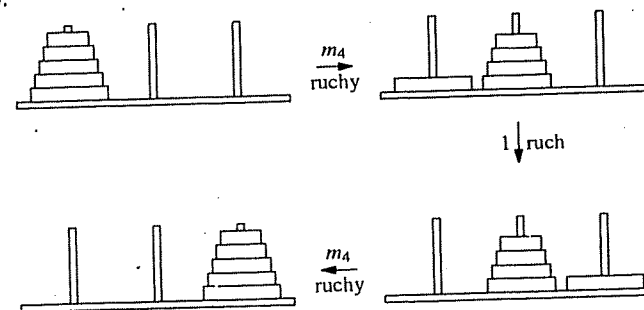
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, jeżeli podejrzewamy, że mamy wzór na p_{jk} , to należy po prostu sprawdzić, czy spełnia on powyższe zależności. Jednak bez pewnych nowych technik, zależności te nic nie wnoszą przy faktycznym szukaniu ogólnego wzoru na p_{jk} . $\square$

W obu tych przykładach rozważane liczby są definiowane przez zależność rekurencyjną, gdzie po określeniu początkowych wartości, wzór pokazuje, w jaki sposób są generowane następne wyrazy. W niektórych przypadkach jest możliwe „rozwiązanie” zależności rekurencyjnej; tj. zastosowanie jej, by otrzymać dokładny wzór dla ogólnego wyrazu. Rozdział ten składa się z pewnych przykładów zależności rekurencyjnych, ilustrujących różne techniki ich rozwiązywania. Następne dwa przykłady są umiarkowanie proste, gdyż w każdym przypadku zależność rekurencyjna używa tylko poprzedniego wyrazu (tj. wyraża m_n , stosując tylko m_{n-1}).

Przykład: (Wieża Hanoi) W tej słynnej łamigłówce (znanej czasami jako Wieża Brahmy) jest dana podstawka z trzema pionowymi palikami. Na pierwszy z nich nanizano n krążków według malejących promieni, tak jak pokazano na rysunku. Zadanie polega na przeniesieniu tego stosu krążków na trzeci palik: wolno przenieść za każdym razem tylko jeden krążek, z jednego palika na inny, a na żadnym paliku nigdy nie może leżeć większy krążek na mniejszym. Jaka jest potrzebna minimalna liczba ruchów?



Rozwiązanie: Niech m_n będzie minimalną liczbą ruchów, potrzebną w przypadku n krążków. Oczywiście $m_1 = 1$. Wyobraźmy sobie teraz, że wiemy jak przestawić, na przykład, cztery krążki w najbardziej ekonomiczny sposób, wykonując m_4 ruchy. Wówczas próbujemy wykonać to samo zadanie z pięcioma krążkami. Można przestawić cztery górne krążki na środkowy palik (wykonując m_4 ruchy), następnie nanizac największy krążek na trzeci palik (jeden ruch więcej), by w końcu przestawić cztery krążki ze środkowego palika na palik trzeci (wykonując dalsze m_4 ruchy).



Z drugiej strony, aby przenieść pięć krążków należy przełożyć cztery górne z pierwszego palika, czyli powyższa metoda, wykonująca $2m_4 + 1$ ruchów, jest najbardziej efektywna. Stąd $m_5 = 2m_4 + 1$. Oczywiście, to rozumowanie możemy uogólnić na n krążków otrzymując zależność rekurencyjną

$$m_1 = 1 \quad i \quad m_n = 2m_{n-1} + 1 \quad (n > 1)$$

W ten sposób, $m_2 = 2m_1 + 1 = 3, m_3 = 2m_2 + 1 = 7, \dots$ i reguła ta generuje ciąg 1, 3, 7, 15, 31, 63, Prawdopodobnie czytelnik rozpoznał ogólny wyraz, mianowicie $m_n = 2^n - 1$. Zależność rekurencyjna jednoznacznie wyznacza ciąg i, aby potwierdzić, że wzór ten jest poprawny, należy tylko zauważyć, iż spełnia on zależność:

$$m_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad i \quad m_n = 2^n - 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2m_{n-1} + 1$$

Stąd liczba ruchów potrzebnych w łamigłówce Wieża w Hanoi, w przypadku n krążków, jest równa rzeczywiście $2^n - 1$. $\square$

Przykład: W rozdziale 2 zastosowaliśmy współczynniki wielomianowe do dowodu twierdzenia Cayleya, że liczba drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$

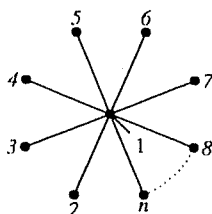
wynosi n^{n-2} . Alternatywne podejście (wersja, którą można znaleźć w książce R.J. Wilsona *Introduction to graph theory*), prowadzi do zależności dotyczącej liczby drzew, w których stopień pierwszego wierzchołka jest zadany. W szczególności, jeżeli t_k oznacza liczbę drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$, w których wierzchołek 1 jest połączony ze wszystkimi, z wyjątkiem k , pozostałymi wierzchołkami (tj. w których stopień wierzchołka 1 jest równy $n - k - 1$), to można pokazać, że

$$t_k = \frac{(n-k-1)(n-1)}{k} t_{k-1} \quad (0 < k < n-1)$$

Znaleźć dokładny wzór na t_k i udowodnić, że

$$t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-2} = n^{n-2}$$

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że t_0 jest liczbą drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$, w których wierzchołek 1 jest połączony ze wszystkimi pozostałymi wierzchołkami. Oczywiście jest tylko jedno takie drzewo, tak jak pokazano, i stąd $t_0 = 1$. Ten wyjściowy punkt, wraz ze wzorem na t_k wyrażonym przez t_{k-1} , daje zależność rekurencyjną, która jednoznacznie wyznacza wartości $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-2}$. Stosując tę zależność w przypadku k , potem w przypadku $k-1$ itd., możemy wywnioskować, że



$$\begin{aligned} t_k &= \frac{(n-k-1)(n-1)}{k} t_{k-1} = \frac{(n-k-1)(n-1)}{k} \frac{(n-(k-1)-1)(n-1)}{k-1} t_{k-2} \\ &= \frac{(n-k-1)(n-k)(n-1)^2}{k(k-1)} t_{k-2} \\ &= \frac{(n-k-1)(n-k)(n-k+1)(n-1)^3}{k(k-1)(k-2)} t_{k-3} \\ &\vdots \\ &= \frac{(n-k-1)(n-k) \dots (n-2)(n-1)^k}{k(k-1) \dots 1} t_0 \\ &= \binom{n-2}{k} (n-1)^k \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-2} &= \binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} (n-1) + \binom{n-2}{2} (n-1)^2 + \dots + \binom{n-2}{n-2} (n-1)^{n-2} \\ &= \underbrace{\left(\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} (n-1) + \binom{n-2}{2} (n-1)^2 + \dots + \binom{n-2}{n-2} (n-1)^{n-2} \right)}_{\text{rozwinięcie dwumianowe wyrażenia } (1+(n-1))^{n-2}} \\ &= n^{n-2} \end{aligned}$$

□

W obu tych przykładach zależność rekurencyjna jest związana jedynie z jednym poprzedzającym wyrazem. Przejdziemy teraz do przykładów, w których, tak jak w przypadku liczb Fibonacciego, zależność rekurencyjna jest związana z dwoma poprzedzającymi wyrazami.

Twierdzenie: Niech będą zadane a_0 i a_1 oraz niech $a_2, a_3, \dots$ będą określone zależnością rekurencyjną

$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2} \quad (n > 1)$$

gdzie A i B są stałymi. Dalej, niech α, β będą pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 = Ax + B$ (zwanego *równaniem charakterystycznym*).

Wówczas:

(i) jeżeli $\alpha \neq \beta$, to istnieją stałe c, d takie, że

$$a_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad \text{dla każdego } n \geq 0$$

(ii) jeżeli $\alpha = \beta$, to istnieją stałe c, d takie, że

$$a_n = (c + dn)\alpha^n \quad \text{dla każdego } n \geq 0$$

Dowód: Pokażemy przypadek (i) (dowód przypadku (ii) przebiega bardzo podobnie i jest pozostawiony jako zadanie dla czytelnika). Łatwo można sprawdzić, że dla jakichkolwiek wartości stałych c i d , zadany wzór spełnia zależność $a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} A a_{n-1} + B a_{n-2} &= A(c\alpha^{n-1} + d\beta^{n-1}) + B(c\alpha^{n-2} + d\beta^{n-2}) \\ &= c\alpha^{n-2} \underbrace{(A\alpha + B)}_{=\alpha^2} + d\beta^{n-2} \underbrace{(A\beta + B)}_{=\beta^2} \\ &= c\alpha^n + d\beta^n \\ &= a_n \end{aligned}$$

Ten ogólny krok zależy od faktu, że α i β są pierwiastkami równania $x^2 = Ax + B$, a nie zależy od wartości stałych c i d : muszą one być wybrane teraz tak, by ten wzór zachodził w przypadkach $n = 0$ oraz $n = 1$; tj. by spełniały

$$c + d(= c\alpha^0 + d\beta^0) = a_0 \quad \text{i} \quad c\alpha + d\beta = a_1$$

Ponieważ $\alpha \neq \beta$, równania te wyznaczają jednoznacznie wartości c oraz d i dla tych konkretnych wartości zadany wzór zachodzi dla każdego $n \geq 0$. □

Przykład: Znaleźć wzór na liczbę Fibonacciego F_n .

Rozwiązanie: Wiemy, że $F_0 = 0, F_1 = 1$ oraz $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, dla $n > 1$. W ten sposób ta zależność rekurencyjna ma równanie charakterystyczne $x^2 = x + 1$, którego pierwiastkami są $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ i $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Stąd, na mocy twierdzenia,

$$F_n = c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + d \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

dla pewnych stałych c i d . Aby znaleźć wartości dla tych stałych, wykorzystajmy fakt, że wzór ten zachodzi dla $n = 0$ i $n = 1$, otrzymamy wtedy

$$c + d = F_0 = 0 \quad \text{ i } \quad c \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + d \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = F_1 = 1$$

równania te mają rozwiązanie $c = 1/\sqrt{5}$ i $d = -1/\sqrt{5}$. Tak więc

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

(jest to wzór, który mieliśmy poprzednio). $\square$

Twierdzenie to (i jego proste uogólnienia) umożliwia rozwiązywanie zależności rekurencyjnych, w których każdy wyraz jest wyrażony przez sumę stałych wielokrotności ustalonej liczby poprzednich wyrazów. Jednak większość interesujących zależności, spotykanych w kombinatoryce, jest o wiele bardziej skomplikowana. W następnym przykładzie wprowadzimy inną metodę rozwiązywania prostej zależności rekurencyjnej, którą w rzeczywistości można stosować do wielu problemów: kolejny przykład podaje inne sformułowanie liczb Fibonacciego.

Przykład: Niech $F_0, F_1, F_2, \dots$ będą liczbami Fibonacciego i niech f będzie funkcją zdefiniowaną w następujący sposób:

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots$$

Pokazać, że

$$f(x) = \frac{x}{1 - x(1 + x)}$$

a następnie wyrazić F_n jako sumę współczynników dwumianowych.

Rozwiązanie: Jako matematycy, czytelnicy, być może, pomyślą o zbieżności i zechcą dowiedzieć się, dla jakich x wyrażenie $f(x)$ jest poprawnie zdefiniowane, ale tak naprawdę, nie ma to większego znaczenia. Funkcja f nazywa się „funkcją tworzącą” (zwykłą funkcją tworzącą) ciągu $F_0, F_1, F_2, \dots$: jest to „formalne” algebraiczne wyrażenie w tym sensie, że zachowuje się w naturalny algebraiczny sposób, lecz x nigdy nie przyjmuje wartości liczbowej, a jego wykładnik spełnia jedynie rolę „wskaźnika miejsca” w szeregu potęgowym. Mając to na uwadze, widzimy, że

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots$$

$$x f(x) = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \dots$$

$$x^2 f(x) = F_0 x^2 + F_1 x^3 + \dots$$

Wiemy jednak, że $F_2 = F_1 + F_0$, $F_3 = F_2 + F_1$ itd., a więc odejmując od pierwszego wyrażenia drugie i trzecie, otrzymujemy

$$f(x)(1 - x(1 + x)) = f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = \begin{matrix} F_0 & + & (F_1 - F_0)x & = & x \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & 1 & & 0 \end{matrix}$$

a stąd

$$f(x) = \frac{x}{1 - x(1 + x)}$$

jak żądaliśmy. Rozwinięciem w szereg wyrażenia $1/(1 - y)$ jest szereg geometryczny

$$1 + y + y^2 + y^3 + \dots$$

podstawiając zatem $y = x(1 + x)$ otrzymujemy

$$f(x) = x[1 + x(1 + x) + x^2(1 + x)^2 + x^3(1 + x)^3 + \dots]$$

F_n jest teraz, po prostu, współczynnikiem przy x^n w $f(x)$, by więc odzyskać F_n musimy wyznaczyć liczbę wyrazów x^n w naszym nowym rozwinięciu funkcji $f(x)$. W takim razie powinniśmy zliczyć wyrażenia x^{n-1} w każdym $x^k(1 + x)^k$: jest ich tyle, ile wyrazów x^{n-k-1} w $(1 + x)^k$, a tych z kolei jest tyle, ile wynosi wartość współczynnika dwumianowego $\binom{k}{n-k-1}$. W konsekwencji liczba wyrazów x^n w rozważanym rozwinięciu jest równa:

$$f(x) = x[1 + \dots + x^{n-3} \binom{n-3}{2} (1+x)^{n-3} + x^{n-2} \binom{n-2}{1} (1+x)^{n-2} + x^{n-1} \binom{n-1}{0} (1+x)^{n-1} + \dots]$$

zero od
tego momentu

Wynika stąd, że

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$$

(gdzie od pewnego miejsca wszystkie te współczynniki dwumianowe są zerami). $\square$

Dla danego ciągu $a_0, a_1, a_2, \dots$ jego funkcja tworząca jest zdefiniowana wzorem

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

W poprzednim przykładzie skomentowaliśmy czysto algebraiczną naturę funkcji tworzącej. Teraz zobaczymy pewne tego konsekwencje: następnych kilka przykładów wykazuje jej wszechstronność.

Przykład: Niech N będzie ustaloną, dodatnią liczbą całkowitą i niech dla $0 \leq n \leq N$

$$a_n = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{N}{n}$$

Stosując metodę funkcji tworzących, wyrazić a_n jako pojedynczy współczynnik dwumianowy.

Rozwiązanie: W przykładzie rozpatrywanym na stronie 12 dowiedliśmy identytety dwumianowej, która będzie równoważna z aktualnie rozważaną. W tym miejscu, na jej przykładzie pokażemy zastosowanie funkcji tworzących. Chcemy znaleźć $a_0, a_1, \dots, a_N$, a więc definiujemy funkcję tworzącą tego ciągu i zobaczmy, jak wygląda po całkowitym rozpisaniu:

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N \\ &= \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{3}{0} + \binom{4}{0} + \dots + \binom{N}{0} \\ &\quad + \binom{1}{1}x + \binom{2}{1}x + \binom{3}{1}x + \binom{4}{1}x + \dots + \binom{N}{1}x \\ &\quad + \binom{2}{2}x^2 + \binom{3}{2}x^2 + \binom{4}{2}x^2 + \dots + \binom{N}{2}x^2 \\ &\quad + \binom{3}{3}x^3 + \binom{4}{3}x^3 + \dots + \binom{N}{3}x^3 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \binom{N}{N}x^N \end{aligned}$$

Wówczas każda kolumna jest, po prostu, rozwinięciem dwumianowym, a więc możemy dodać, kolumnę po kolumnie, otrzymując

$$a(x) = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^N$$

Jest to ciąg geometryczny, mający sumę

$$a(x) = \frac{(1+x)^{N+1} - 1}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^{N+1} - 1}{x}$$

Teraz a_n jest współczynnikiem przy x^n w tym wyrażeniu, równym współczynnikowi przy x^{n+1} w $(1+x)^{N+1}$, mianowicie $\binom{N+1}{n+1}$. $\square$

Przykład: (i) Pokazać, że zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$ może być podzielony na dwa niepuste zbiory na $2^{n-1} - 1$ sposoby.

(ii) Niech s_n oznacza liczbę sposobów podziału zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na trzy niepuste zbiory. Na przykład $s_4 = 6$; tych sześć podziałów to

$$\begin{aligned} \{1\} \{2\} \{3, 4\}, & \quad \{1\} \{3\} \{2, 4\}, & \quad \{1\} \{4\} \{2, 3\}, \\ \{2\} \{3\} \{1, 4\}, & \quad \{2\} \{4\} \{1, 3\}, & \quad \{3\} \{4\} \{1, 2\} \end{aligned}$$

Pokazać, że s_n jest wyznaczony zależnością rekurencyjną

$$s_0 = 0 \quad s_1 = 0 \quad i \quad s_n = 3s_{n-1} + 2^{n-2} - 1 \quad (n > 1)$$

Stosując funkcję tworzącą, znaleźć dokładny wzór na s_n .

Rozwiązanie: (i) Uporządkowanie dwóch zbiorów nie ma znaczenia, niech więc n należy do pierwszego z tych zbiorów. Wówczas podzielenie $\{1, 2, \dots, n\}$ na dwa niepuste zbiory jest, oczywiście, równoważne z wybraniem drugiego zbioru jako dowolnego, niepustego podzbioru z $\{1, 2, \dots, n-1\}$: jest $2^{n-1} - 1$ takich zbiorów.

(ii) Rozważmy teraz s_n podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na trzy zbiory: albo zbiór $\{n\}$ będzie jednym z tych trzech zbiorów, albo nie będzie! W pierwszym przypadku zbiór $\{1, 2, \dots, n-1\}$ może być podzielony na dwa pozostałe zbiory na $2^{n-2} - 1$ sposoby (na podstawie (i)): w drugim przypadku zbiór $\{1, 2, \dots, n-1\}$ musi być podzielony na trzy zbiory i n musi być umieszczone w jednym z nich, dając $3s_{n-1}$ podziałów tego typu. Stąd wynika, że

$$s_0 = 0 \quad s_1 = 0 \quad i \quad s_n = 3s_{n-1} + 2^{n-2} - 1 \quad (n > 1)$$

Niech s będzie funkcją tworzącą ciągu $s_0, s_1, s_2, \dots$:

$$s(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + s_4x^4 + \dots$$

Wówczas

$$3xs(x) = 3s_0x + 3s_1x^2 + 3s_2x^3 + 3s_3x^4 + \dots$$

Ale, na mocy powyższej zależności rekurencyjnej, $s_0 = s_1 = 0$, $s_2 - 3s_1 = 2^0 - 1$, $s_3 - 3s_2 = 2^1 - 1$ itd. Stąd, odejmując $3xs(x)$ od $s(x)$, mamy

$$\begin{aligned} (1-3x)s(x) &= (2^0 - 1)x^2 + (2^1 - 1)x^3 + (2^2 - 1)x^4 + \dots \\ &= x^2[(1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots) - (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)] \\ &= x^2 \left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \right) \end{aligned}$$

W ten sposób, po rozkładzie na ułamki proste, widzimy, że

$$\begin{aligned} s(x) &= x^2 \left(\frac{1}{(1-2x)(1-3x)} - \frac{1}{(1-x)(1-3x)} \right) \\ &= x^2 \left(\frac{3}{2(1-3x)} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{2}{1-2x} \right) \end{aligned}$$

Możemy teraz wywnioskować, że s_n , będące współczynnikiem przy x^n w $s(x)$, dane jest wzorem

$$s_n = \frac{3}{2}3^{n-2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot 2^{n-2} = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1 - 2^n)$$

(Liczba różnych sposobów podziału $\{1, 2, \dots, n\}$ na k niepustych zbiorów jest oznaczana przez $S(n, k)$ i nazywa się liczbą Stirlinga drugiego rodzaju, od nazwiska Jamesa Stirlinga, matematyka żyjącego w osiemnastym wieku. W zadaniach wyprowadzimy zależność rekurencyjną dla tych liczb — jak również tych „pierwszego rodzaju”). $\square$

Przykład: Wiedząc, że liczby p_{jk} w trójkącie Pascala (tak jak we wcześniejszym przykładzie) spełniają zależność rekurencyjną

$$p_{n0} = 1 \quad p_{0n} = 1 \quad i \quad p_{jk} = p_{(j-1)k} + p_{j(k-1)} \quad (j, k > 0)$$

znaleźć dokładny wzór na p_{jk} .

Rozwiązanie: Przykład ten jest dość sztuczny, gdyż znamy już wzór na p_{jk} (mianowicie $(j+k)!/j!k!$) i moglibyśmy tylko sprawdzić, czy rzeczywiście spełnia on przedstawioną zależność rekurencyjną. My jednak wyobrazimy sobie, że nie znamy jeszcze wzoru na p_{jk} i zastosujemy metodę funkcji tworzących w celu jego znalezienia.

Jest kilka sposobów postępowania z „podwójnym ciągiem”, takim jak p_{jk} , w którym są dwa wskaźniki: my zdefiniujemy funkcję tworzącą dla każdego wiersza trójkąta Pascala. Tak więc, niech dla $n \geq 0$, $f_n(x)$ będzie określone następująco:

$$f_n(x) = p_{n0} + p_{(n-1)1}x + p_{(n-2)2}x^2 + \dots + p_{1(n-1)}x^{n-1} + p_{0n}x^n$$

Wówczas

$$f_1(x) = p_{10} + p_{01}x = 1 + x$$

i możemy zastosować zadaną zależność rekurencyjną, by zobaczyć, że dla $n > 1$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= p_{n0} + p_{(n-1)1}x + p_{(n-2)2}x^2 + \dots + p_{0n}x^n \\ &= \underset{p_{(n-1)0}}{1} + (p_{(n-2)1} + p_{(n-1)0})x + (p_{(n-3)2} + p_{(n-2)1})x^2 + \dots + \underset{p_{0(n-1)}}{1}x^n \\ &= (1+x)(p_{(n-1)0} + p_{(n-2)1}x + p_{(n-3)2}x^2 + \dots + p_{0(n-1)}x^{n-1}) \\ &= (1+x)f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Stąd funkcje tworzące f_n same spełniają prostą zależność rekurencyjną, mianowicie

$$f_1(x) = 1 + x \quad i \quad f_n(x) = (1+x)f_{n-1}(x) \quad (n > 1)$$

Tak więc

$$f_n(x) = (1+x)f_{n-1}(x) = (1+x)^2f_{n-2}(x) = \dots = (1+x)^{n-1}f_1(x) = (1+x)^n$$

i $f_n(x)$ równa się $(1+x)^n$. Stąd, jeżeli $j+k=n$, to w trójkącie Pascala wyraz p_{jk} , będący współczynnikiem przy x^k w $f_n(x)$, jest po prostu współczynnikiem przy x^k w $(1+x)^n$; tj. $\binom{n}{k}$. To, mimo że nie jest dla nas zaskoczeniem, w bardzo trafny sposób pokazuje zastosowanie funkcji tworzących. $\square$

Przykład: W czasie pisania tej książki, z łatwością osiągalnymi brytyjskimi monetami były 1p, 2p, 5p, 10p, 20p, 50p i £1. Pokazać, że liczba różnych sposobów utworzenia n pensów, przy posiadaniu nieograniczonego zapasu tych monet, jest równa współczynnikowi przy x^n w

$$((1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100}))^{-1}$$

Rozwiązanie: Podana funkcja może być zapisana jako

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots) \\ \times (1+x^{10}+x^{20}+\dots)(1+x^{20}+x^{40}+\dots)(1+x^{50}+\dots)(1+x^{100}+\dots)$$

Kiedy, na przykład x^{21} może pojawić się w tym rozwinięciu? Oto kilka możliwości

$$x^{21} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \text{lub} \quad x^{19} \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \text{lub} \quad x^{11} \cdot 1 \cdot x^{10} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ \text{lub} \quad x^{11} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^{10} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \text{lub} \quad \dots$$

Każdy iloczyn składa się z siedmiu czynników. Jeżeli pierwszym czynnikiem jest x^a , to można zinterpretować to jako a pensów w jednopensowych monetach; jeżeli drugim czynnikiem jest x^b , to można zinterpretować to jako b pensów w dwupensowych monetach itd. W ten sposób powyższe iloczyny odpowiadają następującym układom

$$21@1p \quad \text{lub} \quad 19@1p, 1@2p \quad \text{lub} \quad 11@1p, 2@5p \\ \text{lub} \quad 11@1p, 1@10p \quad \text{lub} \quad \dots$$

Po chwili zastanowienia dojdziemy do wniosku, że istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność, między sposobami otrzymania x^{21} w rozważanym rozwinięciu a sposobami utworzenia z monet 21 pensów; tj. współczynnik przy x^{21} jest równy liczbie sposobów utworzenia z monet 21 pensów: oczywiście, podobny argument jest poprawny również w przypadku n pensów. $\square$

Przykład: Niech d_n oznacza liczbę sposobów otrzymania w sumie n oczek, przy sukcesywnym rzucie kostką. Na przykład $d_4 = 8$; możliwymi wynikami są

$$1+1+1+1, \quad 1+1+2, \quad 1+2+1, \quad 2+1+1, \\ 1+3, \quad 2+2, \quad 3+1, \quad 4$$

Pokazać, że d_n jest współczynnikiem przy x^n w wyrażeniu

$$(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$$

Rozwiązanie: Warto zwrócić uwagę na istotną różnicę między tym przykładem a poprzednim, mianowicie tym razem jest ważne uporządkowanie. Teraz suma 4, otrzymana ze składników $1+2+1$, jest traktowana jako różna od $1+1+2$, podczas gdy tworząc sumę 4 pensów z dwóch monet jednopensowych i jednej dwupensowej, uporządkowanie ich nie miało znaczenia.

Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania jest znalezienie zależności rekurencyjnej dla ciągu $d_0, d_1, d_2, \dots$, a następnie zastosowanie naszej tradycyjnej metody wyznaczającej funkcję tworzącą $d(x)$. Na przykład nie trudno zauważyć (biorąc pod uwagę ostatni rzut), że

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} + d_{n-3} + d_{n-4} + d_{n-5} + d_{n-6} \quad (n > 6)$$

i można wykorzystać to, wraz z pewnymi początkowymi wartościami, do wyznaczenia żądanej postaci dla $d(x)$.

Jasne jest, że liczba sposobów wyrzucenia łącznie n oczek w *jednym* rzucie kostką równa się współczynnikowi przy x^n w wyrażeniu

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

(ponieważ można otrzymać 1–6 na dokładnie jeden sposób, a wszystkie pozostałe na zero sposobów). Po krótkim zastanowieniu uświadomimy sobie, że liczba sposobów wyrzucenia łącznie n oczek w *dwóch* rzutach kostką, jest równa współczynnikowi przy x^n w wyrażeniu

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

(na przykład, możemy otrzymać 5 oczek jako 1+4 lub 2+3, lub 3+2, lub 4+1, i możemy otrzymać x^5 jako $x \cdot x^4$ lub $x^2 \cdot x^3$, lub $x^3 \cdot x^2$, lub $x^4 \cdot x$). Nie jest trudno to uogólnić: liczba sposobów wyrzucenia n oczek w k rzutach kostką równa się współczynnikowi przy x^n w wyrażeniu

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k \quad (\text{dowolne } k \geq 0)$$

Tak więc liczba sposobów wyrzucenia łącznie n oczek, kiedy jest dozwolona *dowolna* liczba rzutów wynosi

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \text{współczynnik przy } x^n \text{ w } (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k \\ &= \text{współczynnik przy } x^n \text{ w } \sum_{k=0}^{\infty} (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k \\ &= \text{współczynnik przy } x^n \text{ w } (1 - (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6))^{-1} \end{aligned}$$

co chcieliśmy pokazać. $\square$

Widzieliśmy już dwa przykłady „podziału”: podział zbioru na trzy podzbiory i podział n pensów na podgrupy złożone z monet różnych wartości. W teorii liczb *podział* dodatniej liczby całkowitej n jest to sposób przedstawienia n jako sumy dodatnich liczb całkowitych. Dla przykładu jest siedem różnych podziałów liczby 5, mianowicie, 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 i 1+1+1+1+1. Zauważmy, że uporządkowanie składników w sumie nie ma znaczenia, a więc 3+2 jest traktowane jako ten sam podział liczby 5, co 2+3. Znalezienie wzoru na liczbę podziałów liczby n jest trudnym problemem. Funkcje tworzące pozwalają wyrazić odpowiedź jako współczynnik w pewnym rozwinięciu. Chociaż nie daje to konkretnej odpowiedzi, to jednak umożliwia poznanie pewnych zdumiewających faktów dotyczących podziałów.

Przykład: Niech p_n oznacza liczbę wszystkich podziałów liczby n , niech d_n będzie liczbą tych podziałów, w których rozbięcie składa się tylko z różnych liczb, i niech o_n będzie liczbą podziałów liczby n , w których występują tylko całkowite

liczby nieparzyste. Tak więc, na przykład, $p_5 = 7$ (jak powyżej), $d_5 = 3$ (dozwolone są tylko podziały 5, 4+1 i 3+2) i $o_5 = 3$ (dozwolone są tylko podziały 5, 3+1+1 i 1+1+1+1+1). Znaleźć funkcje tworzące ciągów p_n , d_n i o_n oraz wywnioskować, że dla każdego n , $d_n = o_n$.

Rozwiązanie: Jesteśmy już zaznajomieni z pojęciem zliczania podziałów: w przykładzie z monetami trzeba było znaleźć podziały liczby n , w których mogły być użyte tylko liczby 1, 2, 5, 10, 20, 50 i 100. Ta sama zasada wskazuje prostą drogę wyznaczenia funkcji tworzącej ciągu p_n , mianowicie

$$p(x) = \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)}_{\text{(zliczający jedynki)}} \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)}_{\text{(zliczający dwójki)}} \underbrace{(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)}_{\text{(zliczający trójki)}} \dots$$

Jeżeli nie wolno użyć żadnej liczby więcej niż raz, to powyższe wyrażenie redukuje się do funkcji tworzącej ciągu d_n , w następujący sposób:

$$d(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots$$

a jeżeli wolno użyć tylko liczb całkowitych nieparzystych, to otrzymujemy funkcję tworzącą ciąg o_n w postaci

$$o(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \dots$$

W takim razie, żądane trzy funkcje tworzące mają postać

$$\begin{aligned} p(x) &= ((1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \dots)^{-1} \\ d(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5) \dots \\ o(x) &= ((1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9) \dots)^{-1} \end{aligned}$$

Teraz, aby pokazać, że dla każdego n , $d_n = o_n$, wykażemy po prostu, że dwie odpowiadające im funkcje tworzące (choć wydają się różne) są faktycznie takie same:

$$\begin{aligned} d(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5) \dots \\ &= \frac{1-x^2}{1-x} \frac{1-x^4}{1-x^2} \frac{1-x^6}{1-x^3} \frac{1-x^8}{1-x^4} \frac{1-x^{10}}{1-x^5} \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \dots \\ &= o(x) \end{aligned}$$

W konsekwencji, liczba podziałów dowolnej liczby całkowitej n na różne liczby całkowite jest rzeczywiście równa liczbie podziałów liczby n na nieparzyste liczby całkowite. $\square$

Kończy to naszą pierwszą podróż w „świat rekurencji”, zagadnienia te będziemy badać dalej w zadaniach. Wiele innych interesujących rekurencyjnych zależności napotkamy również w następnych rozdziałach.

ZADANIA

1. (i) Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n niech g_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, w których żadne dwa elementy nie różnią się o 1. Tak więc, na przykład, $g_3 = 5$; pięć podzbiorów to $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ i $\{1, 3\}$. Znaleźć zależność rekurencyjną dla $g_1, g_2, g_3, \dots$, a następnie pokazać, że g_n jest pewną liczbą Fibonacciego. [O]

(ii) Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n niech j_n oznacza liczbę sposobów ułożenia n identycznych kostek domina, każde o wymiarach $2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, w szufladce o podstawie $2 \text{ cm} \times n \text{ cm}$, bez nakładania się kostki na kostkę. Na przykład $j_3 = 3$; trzy ułożenia są takie, jak pokazano:



Znaleźć zależność rekurencyjną dla $j_1, j_2, j_3, \dots$, a następnie pokazać, że j_n jest pewną liczbą Fibonacciego. [O]

2. Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n niech c_n oznacza ilość ciągów złożonych z n liczb wybranych ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie jedynek i dwóch następujących po sobie dwójek. Tak więc na przykład $c_3 = 17$, a siedemnaście ciągów, to

000, 001, 002, 010, 012, 020, 021, 100,
101, 102, 120, 121, 200, 201, 202, 210, 212

(i) Pokazać, że c_n spełnia zależność rekurencyjną

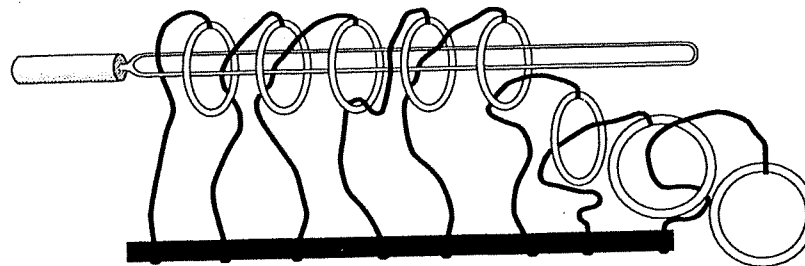
$$c_0 = 1, \quad c_1 = 3 \quad \text{ i } \quad c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n > 1) \quad [\text{W}]$$

(ii) Rozwiązać tę zależność rekurencyjną, stosując przedstawione w tym rozdziale twierdzenie. Następnie wyrazić c_n poprzez współczynniki dwumianowe i całkowite potęgi liczby 2. [O]

(iii) Stosując metodę funkcji tworzących, wyznaczyć alternatywny wzór na c_n , wyrażony przez współczynniki dwumianowe i całkowite potęgi liczby 2. [O]

3. W słynnej *lamigłowie chińskich pierścieni*, pierścienie wraz ze sznureczkami są nanizane na laskę w taki sposób, że o ile pierwszy pierścień (tj. ten po prawej stronie na rysunku) można zdjąć bez żadnych przeszkód, o tyle każdy następny można usunąć tylko wtedy, kiedy poprzedzający go pierścień (tj. znajdujący się po jego prawej stronie) jest na lasce, a wszystkie przed nim są z niej zdjęte. Tak więc, na przykład, piąty pierścień od prawej

strony może być usunięty tylko wtedy, kiedy pierwszy, drugi i trzeci są zdjęte z laski, a czwarty jest na niej.



Niech r_n będzie minimalną liczbą ruchów (tj. przeniesień jednego pierścienia na laskę lub z laski) potrzebną do usunięcia z laski n pierścieni. Pokazać, że r_n spełnia zależność rekurencyjną

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 1 \quad \text{ i } \quad r_n = r_{n-1} + 2r_{n-2} + 1 \quad (n > 1)$$

Następnie, stosując funkcję tworzącą, znaleźć dokładny wzór na r_n . [O]

4. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej k oraz nieujemnej liczby całkowitej n niech $b_{nk} = \binom{n+k-1}{n}$ i niech $b_k(x)$ będzie funkcją tworzącą ciąg $b_{0k}, b_{1k}, b_{2k}, \dots$. Pokazać, że

$$b_1(x) = (1-x)^{-1} \quad \text{ i } \quad b_k(x) = \frac{b_{k-1}(x)}{1-x} \quad (k > 1)$$

i wywnioskować, że b_{nk} jest współczynnikiem przy x^k w $(1-x)^{-k}$.

5. Niech k oraz n będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Pokazać, że liczba różnych rozwiązań równania

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n$$

gdzie każde y_i jest nieujemną liczbą całkowitą, równa się współczynnikowi przy x^n w $(1-x)^{-k}$, co potwierdza tym samym rezultat zamieszczony w rozdziale 1. [W]

6. (i) Niech k oraz n będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Pokazać, że

$$\sum_{y_1, \dots, y_k \text{ są dodatnimi liczbami całkowitymi sumującymi się do } n} y_1 y_2 \dots y_k$$

równa się współczynnikowi przy x^n w wyrażeniu $(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)^k$. Pokazać, że wyrażenie to równa się $x^k(1-x)^{-2k}$, a następnie wyrazić powyższą sumę przez współczynnik dwumianowy. [O]

(ii) W kolejce stoi n uczniów (w ustalonym porządku). Nauczyciel dzieli ich na k grup; pierwsza grupa składa się z kilku pierwszych uczniów w kolejce,

druga grupa z następnych kilku itd., przy czym każda grupa składa się z co najmniej jednego ucznia. Następnie wyznacza on w każdej grupie lidera. Stosując (i), pokazać, że grupy te oraz liderów można wybrać na $\binom{n+k-1}{2k-1}$ sposobów. Następnie przedstawić bezpośredni argument wyboru, potwierdzający tę odpowiedź. [W]

7. (Inwersja — zilustrowana dla parzystego m .) Niech M i N będą następującymi macierzami:

$$M = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\binom{m}{1} & \binom{m}{2} & -\binom{m}{3} & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

Pokazać, że dla $i \geq j$ (i, j) -ty wyraz w iloczynie MN jest równy współczynnikowi przy x^{i-j} w wyrażeniu $(1+x)^i(1+x)^{-(j+1)}$. Wywnioskować, że $M^{-1} = N$. [W]

Zastosować ten wynik do pokazania, że jeżeli

$$\begin{aligned} \binom{1}{1} a_1 &= b_1 \\ \binom{2}{1} a_1 + \binom{2}{2} a_2 &= b_2 \\ \binom{3}{1} a_1 + \binom{3}{2} a_2 + \binom{3}{3} a_3 &= b_3 \\ \vdots & \\ \binom{m}{1} a_1 + \binom{m}{2} a_2 + \binom{m}{3} a_3 + \cdots + \binom{m}{m} a_m &= b_m \end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned} \binom{1}{1} b_1 &= a_1 \\ -\binom{2}{1} b_1 + \binom{2}{2} b_2 &= a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{3}{1} b_1 - \binom{3}{2} b_2 + \binom{3}{3} b_3 &= a_3 \\ \vdots & \\ -\binom{m}{1} b_1 + \binom{m}{2} b_2 - \binom{m}{3} b_3 + \cdots + \binom{m}{m} b_m &= a_m \end{aligned}$$

8. Niech m będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą i niech dla $1 \leq n \leq m$, s_n będzie liczbą suriekcji z $\{1, 2, \dots, m\}$ na $\{1, 2, \dots, n\}$. Rozważając liczbę wszystkich funkcji z $\{1, 2, \dots, m\}$ do $\{1, 2, \dots, n\}$, pokazać, że dla każdego n , gdzie $1 \leq n \leq m$, zachodzi

$$\binom{n}{1} s_1 + \binom{n}{2} s_2 + \cdots + \binom{n}{n} s_n = n^m \quad [W]$$

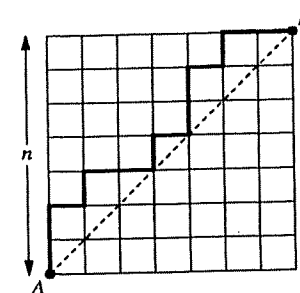
Następnie, stosując metodę inwersji przedstawioną w poprzednim zadaniu, wyznaczyć wzór na s_n , potwierdzając tym samym rezultat z zadania 15 na stronie 61. [O]

9. Niech p oraz d będą funkcjami tworzącymi, związanymi odpowiednio z dowolnymi podziałami i z podziałami na różne składniki, tak jak mieliśmy na stronie 136 tego rozdziału. Pokazać, że $p(x) = d(x)p(x^2)$ i wywnioskować, że

$$p_n = d_n + d_{n-2}p_1 + d_{n-4}p_2 + d_{n-6}p_3 + \cdots$$

Ponadto przedstawić bezpośredni argument, potwierdzający ten ostatni wynik.

10. W rozdziale 1 zaobserwowaliśmy, że liczba najkrótszych dróg od A do B w przedstawionej kratce wymiaru $n \times n$ wynosi $\binom{2n}{n}$. Teraz niech u_n będzie liczbą najkrótszych „górných” dróg od A do B ; tj. tych, które nigdy nie przechodzą poniżej przekątnej AB . Ponadto niech v_n będzie liczbą tych górnych dróg, które dotykają przekątnej AB tylko w punktach A i B .



Pokazać, że $v_n = u_{n-1}$ dla $n > 1$. Następnie, biorąc pod uwagę ostatni punkt, w którym droga dotyka przekątnej, pokazać, że u_n spełniają zależność rekurencyjną

$$u_0 = 1 \quad \text{ i } \quad u_n = u_0 u_{n-1} + u_1 u_{n-2} + u_2 u_{n-3} + \cdots + u_{n-1} u_0 \quad (n > 0) \quad [W]$$

Niech u będzie funkcją tworzącą ciąg u_n . Wywnioskować, że

$$x(u(x))^2 - u(x) + 1 = 0$$

a następnie pokazać, że $u_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ (są to liczby Catalan, o których już wspominaliśmy w rozwiązaniu zadania 13 w rozdziale 1). [W]

11. (i) Dla nieujemnych liczb całkowitych m oraz n niech $s(m, n)$ będzie współczynnikiem przy x^n w wyrażeniu $x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ (wraz z konwencją, że $s(0, 0) = 1$). Współczynniki te są znane jako *liczby Stirlinga pierwszego rodzaju*: pokazać, że można zdefiniować je przy użyciu zależności rekurencyjnej

$$s(0, 0) = 1, \quad s(m, 0) = 0 \quad (m > 0), \quad s(0, n) = 0 \quad (n > 0)$$

i

$$s(m, n) = s(m-1, n-1) - (m-1)s(m-1, n) \quad (m, n > 0)$$

- (ii) Dla nieujemnych liczb całkowitych m oraz n niech $S(m, n)$ będzie liczbą różnych podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ na n niepustych zbiorów (wraz z konwencją, że $S(0, 0) = 1$). Są one znane jako *liczby Stirlinga drugiego rodzaju*: pokazać, że można je określić za pomocą zależności rekurencyjnej

$$S(0, 0) = 1, \quad S(m, 0) = 0 \quad (m > 0), \quad S(0, n) = 0 \quad (n > 0)$$

i

$$S(m, n) = S(m-1, n-1) + nS(m-1, n) \quad (m, n > 0)$$

- (iii) Stosując wzór (z zadania 8) na liczbę suriekcji z $\{1, 2, \dots, m\}$ do $\{1, 2, \dots, n\}$, zapisać dokładny wzór na $S(m, n)$. [O]

- (iv) Niech M i N będą macierzami wymiaru 4×4 , w których (m, n) -tymi wyrazami są odpowiednio, $s(m, n)$ i $S(m, n)$ ($1 \leq m, n \leq 4$). Wyznaczyć wyrazy macierzy M i N oraz potwierdzić, że $M^{-1} = N$. [O]

(Zachodzi to dla macierzy dowolnego wymiaru i jest jednym z kluczowych związków między dwoma rodzajami liczb Stirlinga. O tych i innych własnościach rozważanych liczb — jak również o ogólnych problemach przeliczeniowych — można przeczytać w omawiających szeroko ten temat książkach M. Aigner *Combinatorial theory* lub R. P. Stanleya *Enumerative combinatorics*).

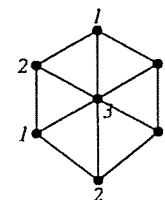
12. Stosując metodę funkcji tworzących, wyznaczyć dwie różne kostki sześciennie z dodatnią liczbą całkowitą na każdej ścianie w ten sposób, że dla dowolnego n liczba sposobów otrzymania w sumie n oczek przy rzucie tych dwóch kostek jest taka sama jak przy tradycyjnej parze kostek. Której z par kostek powinno się użyć w grze *Monopol*? [W,O]

11

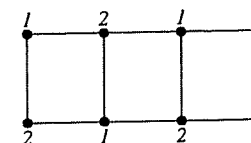
Kolorowanie wierzchołków

Mając zadany graf, chcemy teraz pokolorować jego wierzchołki w ten sposób, aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią miały inny kolor (nazywamy to naturalnie *kolorowaniem wierzchołków*). Jaka jest najmniejsza liczba kolorów, potrzebna do pokolorowania określonego grafu?

Przykład:



Kolorowanie wierzchołków trzema „kolorami”: 1, 2, 3

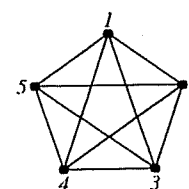


Kolorowanie wierzchołków dwoma „kolorami”: 1, 2

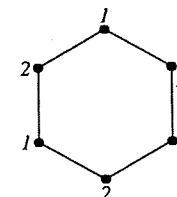
□

Dla grafu G najmniejsza liczba kolorów, potrzebna do pokolorowania jego wierzchołków, nazywa się *wierzchołkową liczbą chromatyczną* (lub, krótko, *liczbą chromatyczną*) grafu G i jest oznaczana przez $\chi(G)$: jest to analogia do indeksu chromatycznego $\chi_e(G)$ wprowadzonego w rozdziale 7.

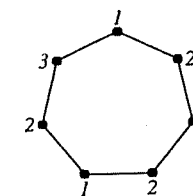
Przykłady: Jest oczywiste, że przy każdym kolorowaniu wierzchołków grafu pełnego K_n potrzeba n kolorów. Również nietrudno jest stwierdzić, że jeżeli graf składa się z pojedynczego cyklu, to, w przypadku parzystej liczby wierzchołków, do ich pokolorowania, wystarczą dwa kolory, natomiast w przypadku, gdy liczba wierzchołków jest nieparzysta, potrzebne są trzy kolory.



$\chi(K_5) = 5$



$\chi(G) = 2$



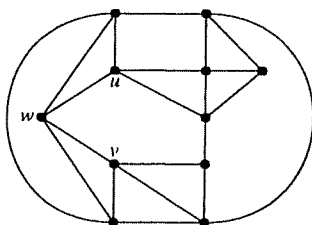
$\chi(G) = 3$

□

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, w którym największy stopień wierzchołka wynosi d . Widzieliśmy w rozdziale 7, że indeks chromatyczny spełnia nierówność $d \leq \chi_e(G) \leq d + 1$. Pierwsze przykłady, zawarte w tym rozdziale, pokazują, iż dolne oszacowanie nie zachodzi dla liczby chromatycznej $\chi(G)$, ale, jak zobaczymy w zadaniach, można bardzo łatwo udowodnić, że $\chi(G)$ spełnia nierówność $\chi(G) \leq d + 1$. Rzeczywiście, w 1941 r. R. L. Brooks pokazał, które grafy spójne mają własność $\chi(G) = d + 1$. Po omówieniu następnego przykładu sformułujemy i udowodnimy jego twierdzenie (ograniczmy się do grafów spójnych, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy po prostu pokolorować niezależnie każdą składową).

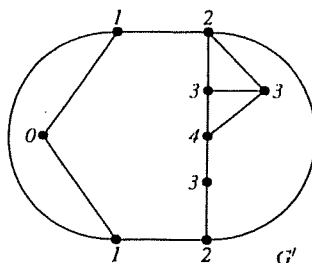
Rozważając kolorowanie krawędzi, zastosowaliśmy technikę zamiany dwóch kolorów w określonych podgrafach. Chociaż istnieją podobne metody dowodzenia wyników dotyczących kolorowania wierzchołków, my zastosujemy dla odmiany podejście algorytmiczne: następujący przykład ilustruje taką technikę dowodzenia.

Przykład: Niech $G = (V, E)$ będzie grafem takim, jak pokazano (największy stopień wierzchołka $d = 4$):



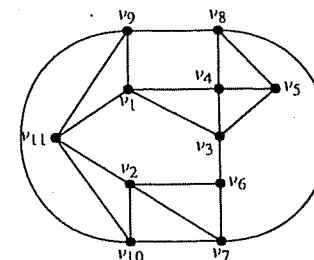
Następujące postępowanie przedstawia sposób pokolorowania wierzchołków grafu G czterema kolorami.

(i) Wierzchołki oznaczone etykietami u, v, w są takie, że $uw, vw \in E$, $uv \notin E$, a usunięcie u oraz v (wraz ze wszystkimi dochodzącymi do nich krawędziami) pozostawi spójny graf G' . Dla każdego wierzchołka x grafu G' wyznaczmy najkrótszą ścieżkę od w do x w grafie G' , tj. ścieżkę, która zawiera możliwie najmniejszą liczbę krawędzi. Liczba ta jest „odległością” wierzchołka x do wierzchołka w w grafie G' ; odległość każdego wierzchołka do w jest przedstawiona na następującym rysunku:



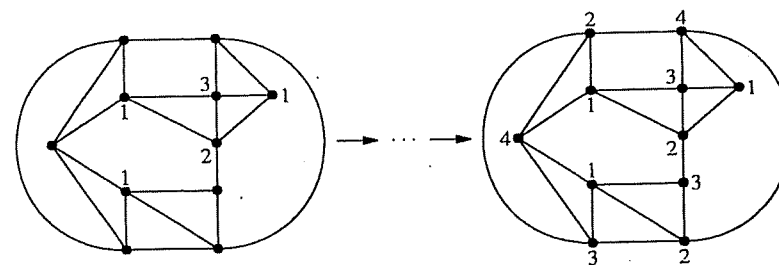
(Zauważmy, że każdy wierzchołek odległy o α (> 0) od w jest połączony z jakimś wierzchołkiem, którego odległość od w wynosi $\alpha - 1$).

(ii) Przyporządkujmy etykiety wierzchołkom w grafie G według następującego schematu. Niech $v_1 = u, v_2 = v$ i niech v_3 będzie wierzchołkiem „najbardziej odległym” od w w grafie G' . Pozostałe wierzchołki oznaczmy jako $v_4, \dots, v_{10}, v_{11} = w$, tak, aby były one progresywnie bliższe wierzchołkowi w (tj. tak, że w grafie G' odległość z v_5 do w jest mniejsza bądź równa odległości z v_4 do w itd.):



(Postępowanie to gwarantuje, że każdy wierzchołek v_i ($i < 11$) jest połączony z jakimś wierzchołkiem o większym wskaźniku).

(iii) Niech „kolory” będą ponumerowane liczbami 1, 2, 3, 4. Kolorujemy wierzchołki grafu G w kolejności $v_1, v_2, \dots, v_{10}, v_{11}$ tak, że w każdym kroku kolor użyty do pokolorowania wierzchołka v_i jest kolorem o najmniejszym numerze, jeszcze nie użytym w wierzchołku połączonym z v_i :

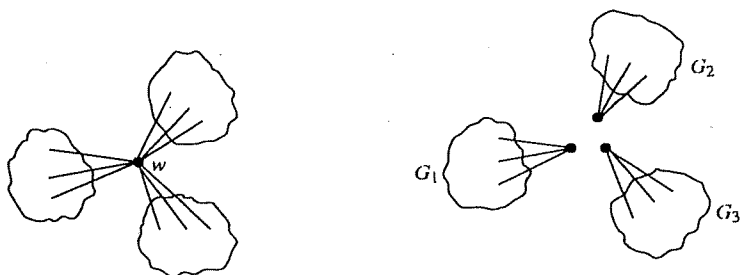


W ten sposób otrzymujemy pokazane kolorowanie wierzchołków grafu G , za pomocą czterech kolorów. Procedura ta jest efektywna, ponieważ w chwili kolorowania wierzchołka v_i ($1 \leq i < 11$) jest on połączony z wierzchołkiem o większym wskaźniku (czyli z nie pokolorowanym): jest więc on połączony z co najwyżej $d - 1$ ($= 3$) pokolorowanymi wierzchołkami. Oznacza to, że dla tego wierzchołka będzie dostępny jeden z czterech kolorów. W końcu, w chwili kolorowania wierzchołka v_{11} , jest on połączony z dwoma wierzchołkami (v_1 i v_2) koloru 1, a więc i tym razem pozostanie dla niego „wolny” kolor. $\square$

Twierdzenie: (Brooksa) Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem o największym stopniu wierzchołka równym d . Jeżeli G jest grafem pełnym lub składa się z pojedynczego cyklu o nieparzystej liczbie krawędzi, to $\chi(G) = d + 1$. We wszystkich pozostałych przypadkach $\chi(G) \leq d$.

Dowód: Rezultat ten jest oczywisty dla grafów pełnych lub dla cykli dowolnego wymiaru. Załóżmy więc, że G nie jest ani grafem pełnym, ani cyklem. Pokażemy, że można pokolorować jego wierzchołki d kolorami. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem liczby wierzchołków. Najmniejszy niebanalny przypadek $|V| = 3$ sprawdza się natychmiast. Załóżmy więc, że G ma opisane własności, $|V| > 3$ i że twierdzenie jest prawdziwe dla grafów o mniejszej liczbie wierzchołków.

Jeżeli G ma wierzchołek w , którego usunięcie go rozspójnia, to założenie indukcyjne może być zastosowane do każdego z grafów G_i (jak pokazano na rysunku). Po krótkim zastanowieniu jest jasne, że wierzchołki każdego grafu G_i mogą być pokolorowane tymi samymi d kolorami, przy czym wierzchołek w , w każdym przypadku, będzie miał identyczny kolor. Wszystkie grafy G_i mogą być następnie w oczywisty sposób złożone razem, dając żądane kolorowanie wierzchołków grafu G za pomocą d kolorów.



Założmy więc teraz dodatkowo, że G nie ma wierzchołka, którego usunięcie rozspójnia go. W zadaniu 12 na stronie 94 widzieliśmy, że grafy pełne oraz cykle charakteryzują się tym, iż żaden pojedynczy wierzchołek nie rozspójnia ich, natomiast jeżeli u, v , oraz w są takimi wierzchołkami, dla których $uw, vw \in E$ i $uv \notin E$, to usunięcie u oraz v powoduje ich rozspójnienie. (Szczegóły dowodu można znaleźć w rozwiązaniach na stronie 256). Ponieważ G nie jest ani cyklem, ani grafem pełnym oraz żaden wierzchołek nie rozspójnia go, zatem w tym przypadku muszą istnieć wierzchołki u, v oraz w , dla których $uw, vw \in E, uv \notin E$, i takie, że usunięcie wierzchołków u i v da w efekcie spójny graf G' .

Tak jak w powyższym przykładzie, przyporządkujmy wierzchołkom w G etykiety w następujący sposób: $v_1 = u, v_2 = v$ i $v_3, \dots, v_{n-1}, v_n = w$ w malejącym porządku ich odległości od wierzchołka w w grafie G' . Takie etykietowanie ma kluczową własność, mianowicie każdy v_i ($1 \leq i < n$) jest połączony z pewnym

wierzchołkiem o większym wskaźniku. Jest to oczywiste dla $i = 1$ oraz $i = 2$. Dla $i > 2$, jeżeli rozważymy najkrótszą ścieżkę od v_i do w w grafie G' , to musi mieć ona postać

$$v_i, v_j, \dots, w$$

odległości od w : $\alpha \quad \alpha - 1 \quad 0$

co znacza, że $v_i v_j \in E$ oraz że $j > i$.

Niech więc teraz „kolory” będą ponumerowane liczbami $1, 2, \dots, d$. Kolorujmy wierzchołki grafu G w kolejności $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$, w taki sposób, że w każdym kroku kolor użyty do pokolorowania wierzchołka v_i jest kolorem o najmniejszym numerze, nie użytym w wierzchołkach połączonych z v_i . Wówczas, tak jak w przykładzie, oba wierzchołki v_1 i v_2 będą miały kolor 1. Ponadto, w czasie kolorowania wierzchołka v_i ($3 \leq i < n$) będzie on połączony z co najmniej jednym wierzchołkiem o większym wskaźniku (a więc jeszcze nie pokolorowanym): a ponieważ jego stopień wynosi co najwyżej d , będzie więc połączony z co najwyżej $d - 1$ pokolorowanymi wierzchołkami. Zatem zawsze jeden spośród d kolorów będzie dostępny dla wierzchołków $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Ostatecznie, ponieważ v_n jest połączony z u i v (z których oba mają kolor 1), będzie również dostępny „wolny” kolor dla wierzchołka v_n . W ten sposób otrzymamy kolorowanie wierzchołków grafu G za pomocą d kolorów. To kończy dowód przez indukcję. $\square$

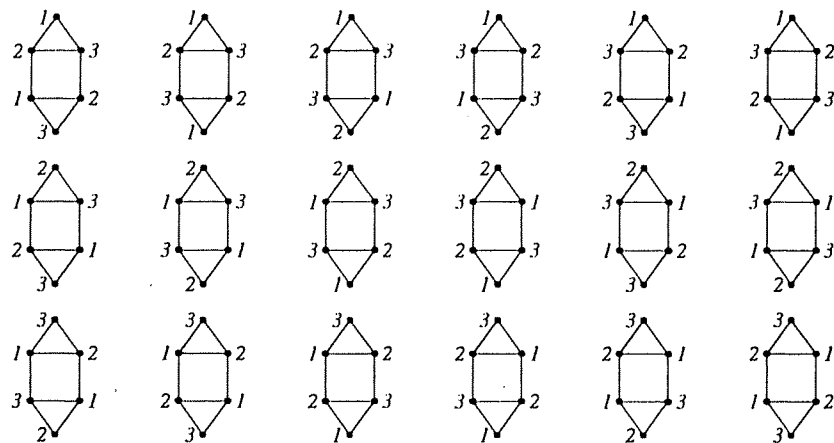
Następne pytanie, które zadajemy, nie dotyczy liczby kolorów potrzebnych do pokolorowania wierzchołków, lecz tego, na ile sposobów można pokolorować wierzchołki, mając do dyspozycji pewne konkretne kolory.

Przykład: Niech G będzie grafem przedstawionym poniżej. Pokazać wszystkie możliwe sposoby pokolorowania wierzchołków grafu G trzema kolorami 1, 2 i 3.

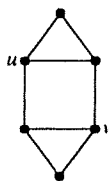


Znaleźć wzór na liczbę pokolorowań wierzchołków grafu G , mając danych k kolorów.

Rozwiązanie: W prosty sposób można wyznaczyć różne pokolorowania wierzchołków grafu G trzema danymi kolorami; jest ich łącznie 18, tak jak to pokazano:

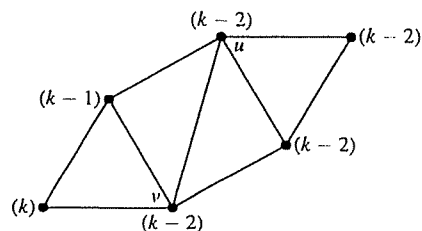


Aby znaleźć wzór na liczbę sposobów pokolorowania wierzchołków grafu G danymi k kolorami, jest wygodnie rozróżnić dwa typy kolorowań. W kolorowaniu pierwszego typu wierzchołki u oraz v (jak pokazano po prawej stronie) mają tę samą kolor, a drugi typ to ten, w którym u oraz v mają różne kolory. Dla tego konkretnego grafu można wówczas łatwo policzyć, ile jest kolorowań każdego typu, a następnie dodać otrzymane dwie wartości:



u oraz v mają różne kolory

Niech G_1 będzie grafem otrzymanym z G przez dodanie krawędzi uv . Wówczas, oczywiście, kolorowanie wierzchołków grafu G z u oraz v o różnych kolorach jest równoważne z kolorowaniem wierzchołków grafu G_1 . Wyobraźmy sobie kolorowanie wierzchołków grafu G_1 , gdy mamy do dyspozycji k kolorów, przy czym w każdym kolejnym kroku interesuje nas, ile kolorów mamy do wyboru. W przypadku naszego prostego grafu wyobraźmy sobie kolorowanie jego wierzchołków od strony lewej do prawej: w każdym kroku zapisujemy liczbę dostępnych dla danego wierzchołka kolorów:



Dla wierzchołka z lewej strony jest dostępnych k kolorów, jednak następny wierzchołek musi mieć inny kolor, a więc dla niego jest dostępnych już tylko $k-1$

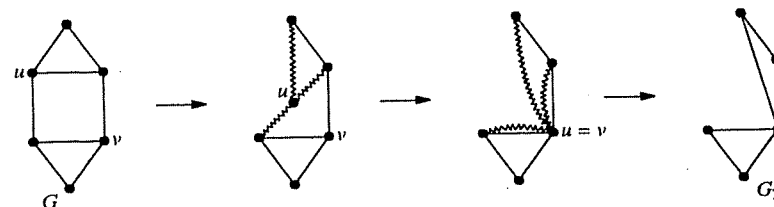
kolorów. Następny wierzchołek (połączony z dwoma wierzchołkami o różnych kolorach) ma dla siebie $k-2$ dostępnych kolorów i tak dalej.

W ten sposób liczba wszystkich różnych kolorowań wierzchołków grafu G_1 (a więc kolorowań wierzchołków grafu G , w których u oraz v mają różne kolory) wynosi

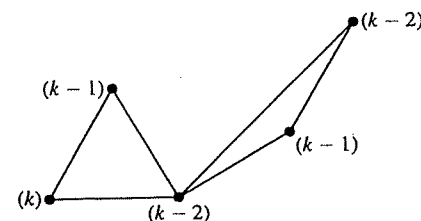
$$k(k-1)(k-2)^4$$

u oraz v mają ten sam kolor

Niech G_2 będzie grafem otrzymanym z G przez „ściągnięcie” dwóch wierzchołków u oraz v ; tzn. stają się one pojedynczym wierzchołkiem, połączonym z każdym innym, z którym którykolwiek z nich był poprzednio połączony:



Po chwili zastanowienia dojdziemy do wniosku, że kolorowanie wierzchołków grafu G , w którym u oraz v mają ten sam kolor, jest równoważne z kolorowaniem bardzo prostego grafu G_2 . Aby zobaczyć, ile jest sposobów dokonania tego, gdy mamy do dyspozycji k kolorów, ponownie kolorujemy wierzchołki grafu G_2 od lewej strony do prawej, zapisując w każdym kroku liczbę dostępnych dla danego wierzchołka kolorów:



W ten sposób liczba wszystkich różnych pokolorowań wierzchołków grafu G_2 (tj. pokolorowań wierzchołków grafu G , w których u oraz v mają ten sam kolor) wynosi

$$k(k-1)^2(k-2)^2$$

W konsekwencji, liczba pokolorowań wierzchołków grafu G jest sumą liczby pokolorowań, w których u oraz v mają różne kolory, i liczby pokolorowań, w których u oraz v mają identyczny kolor, tj.

$$\begin{aligned} k(k-1)(k-2)^4 + k(k-1)^2(k-2)^2 &= k(k-1)(k-2)^2((k-2)^2 + (k-1)) \\ &= k(k-1)(k-2)^2(k^2 - 3k + 3) \end{aligned}$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy $k = 3$, daje to odpowiedź 18, zgodną z pierwszą częścią rozwiązania. $\square$

W powyższym przykładzie liczba pokolorowań wierzchołków grafu G była wielomianem zmiennej k i, jak zaraz zobaczymy, jest to prawdziwe dla każdego grafu.

Twierdzenie: Dla dowolnego, określonego grafu G i dowolnej liczby całkowitej k , niech $p_G(k)$ oznacza liczbę różnych sposobów pokolorowania wierzchołków grafu G przy użyciu dowolnych, spośród k , dostępnych kolorów. Wówczas p_G jest wielomianem zmiennej k (znanym jako wielomian *chromatyczny grafu* G).

Dowód: Zastosujemy indukcję względem m , liczby „brakujących krawędzi” w grafie G , tj. względem liczby dodatkowych krawędzi, potrzebnych do przekształcenia grafu $G = (V, E)$ w graf pełny na zbiorze wierzchołków V . W przypadku gdy $m = 0$, graf G musi być grafem pełnym, a ponieważ każdy wierzchołek musi mieć inny kolor, jest oczywiste, że

$$p_G(k) = k(k-1)(k-2) \cdots (k-|V|+1)$$

co jest wielomianem zmiennej k .

Tak więc założymy, że $m > 0$ i że wynik jest prawdziwy dla grafów o mniejszej liczbie brakujących krawędzi. Wówczas w grafie G brakuje co najmniej jednej krawędzi, a zatem niech u oraz v będą parą nie połączonych wierzchołków w G . Przyjmijmy, że G_1 jest grafem otrzymanym z G przez dodanie krawędzi uv , natomiast G_2 jest grafem otrzymanym z G przez ściągnięcie wierzchołków u i v ; tzn. stają się one pojedynczym wierzchołkiem, połączonym z każdym innym, który był połączony w grafie G albo z u , albo z v . Wówczas, tak jak w poprzednim przykładzie, można bezpośrednio sprawdzić, że

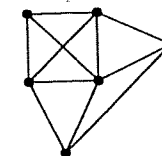
$$\begin{aligned} p_G(k) &= \text{liczba pokolorowań wierzchołków grafu } G \text{ } k \text{ kolorami} \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{liczba pokolorowań} \\ \text{wierzchołków grafu } G \text{ } k \\ \text{kolorami, w których} \\ u \text{ oraz } v \text{ mają różne kolory} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{liczba pokolorowań} \\ \text{wierzchołków grafu } G \text{ } k \\ \text{kolorami, w których} \\ u \text{ oraz } v \text{ mają ten sam kolor} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{liczba pokolorowań} \\ \text{wierzchołków grafu } G_1 \\ k \text{ kolorami} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{liczba pokolorowań} \\ \text{wierzchołków grafu } G_2 \\ k \text{ kolorami} \end{array} \right) \\ &= p_{G_1}(k) + p_{G_2}(k) \end{aligned}$$

Ale każdy z grafów G_1 i G_2 ma mniej brakujących krawędzi niż G i na mocy założenia indukcyjnego oba $p_{G_1}(k)$ oraz $p_{G_2}(k)$, są wielomianami zmiennej k . Stąd ich suma $p_G(k)$ jest również wielomianem zmiennej k i dowód przez indukcję jest zakończony. $\square$

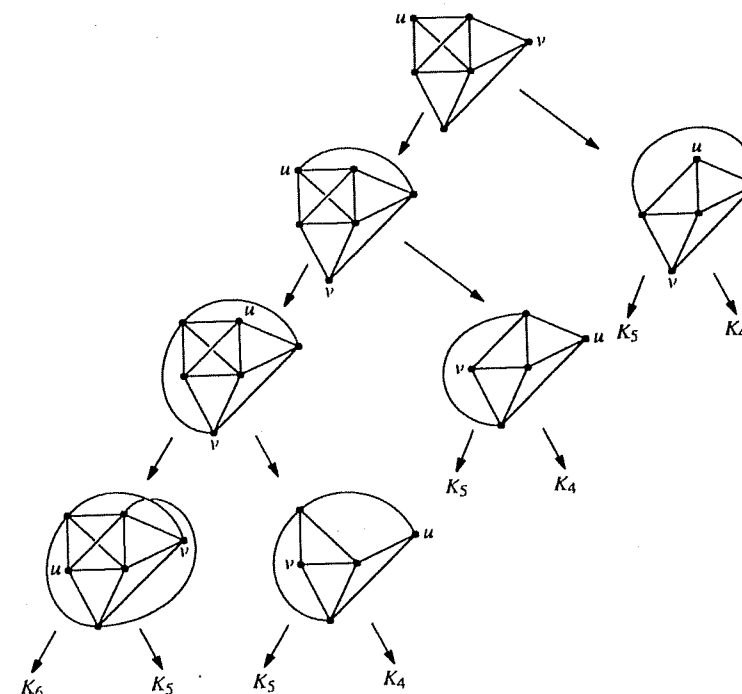
W dowodzie tym pokazaliśmy, że wielomian chromatyczny p_G spełnia zależność rekurencyjną $p_G = p_{G_1} + p_{G_2}$ oraz że zależność ta może być wykorzystana

jako baza prostego algorytmu wyznaczającego p_G . Mając zadany graf G , powtarzamy stosowanie tej zależności rekurencyjnej dopóty, dopóki nie zostaną otrzymane grafy pełne. Wówczas wielomian chromatyczny grafu G jest po prostu sumą wielomianów chromatycznych wszystkich otrzymanych grafów pełnych.

Przykład: Znaleźć wielomian chromatyczny przedstawionego grafu G :



Rozwiązanie: Rozpoczynamy od grafu G : wybieramy parę nie połączonych wierzchołków u oraz v , a następnie przedstawiamy graf G_1 z lewej strony, poniżej G , a graf G_2 z prawej strony, poniżej G . Następnie dla każdego z otrzymanych grafów wybieramy nową parę nie połączonych wierzchołków i powtarzamy postępowanie tak długo, aż otrzymamy grafy pełne.



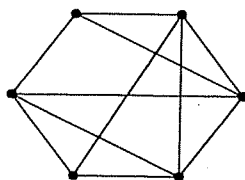
Stąd

$$\begin{aligned}
 p_G(k) &= p_{K_6}(k) + 4p_{K_5}(k) + 3p_{K_4}(k) \\
 &= k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5) + 4k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\
 &\quad + 3k(k-1)(k-2)(k-3) \\
 &= k(k-1)(k-2)(k-3)(k^2 - 5k + 7)
 \end{aligned}$$

□

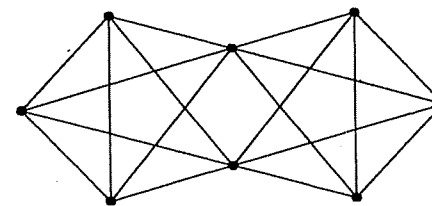
ZADANIA

1. Pokazać, że graf $G = (V, E)$ jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(G) \leq 2$.
2. Mając zadaną liczbę całkowitą $d > 1$, przedstawić graf G o największym stopniu wierzchołka d , dla którego $\chi(G) = 2$.
3. Niech G będzie grafem. Pokazać, że ma on co najmniej $\chi(G)$ wierzchołków stopnia $\chi(G) - 1$ lub większego. [W]
4. Nie korzystając z twierdzenia Brooksa, pokazać przez indukcję względem liczby wierzchołków, że wierzchołki grafu, w którym największy stopień wynosi d , można pokolorować $d + 1$ kolorami.
5. Niech G będzie grafem spójnym o największym stopniu wierzchołka d , w którym istnieje wierzchołek w o stopniu mniejszym niż d . Nadając wierzchołkom etykiety w kolejności malejących odległości od w , przedstawić prosty algorytm kolorowania wierzchołków grafu G za pomocą d kolorów. [O]
6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem i niech $\bar{G}$ będzie jego dopełnieniem (zdefiniowanym w zadaniu 4 na stronie 93). Pokazać, że $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq |V|$ oraz, że $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq |V| + 1$. [W]
7. Niech G będzie grafem i niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Pokazać, że $(x - n)$ jest czynnikiem wielomianu $p_G(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n_i < \chi(G)$.
8. Stosując metodę podaną w ostatnim przykładzie, wyznaczyć wielomian chromatyczny przedstawionego grafu G :



[O]

9. Wyznaczyć wielomian chromatyczny następującego grafu:

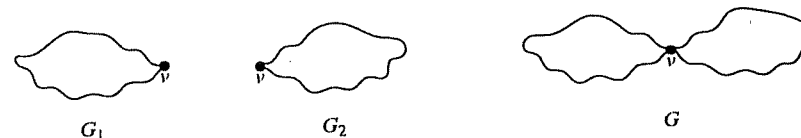


[W,O]

10. Niech G_1 będzie grafem otrzymanym z K_n przez usunięcie dwóch krawędzi, nie mających wspólnego wierzchołka końcowego, i niech G_2 będzie grafem otrzymanym z K_n przez usunięcie dwóch krawędzi, mających wspólny wierzchołek końcowy. Pokazać, że

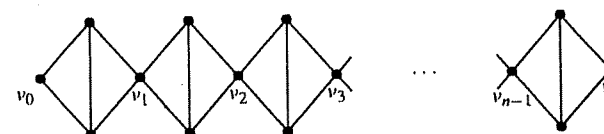
$$p_{G_1}(k) - p_{G_2}(k) = k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+3) \quad [W]$$

11. (i) Niech G_1 i G_2 będą dwoma grafami z jednym wspólnym wierzchołkiem i niech graf G będzie ich „sumą”, tak jak to pokazano:



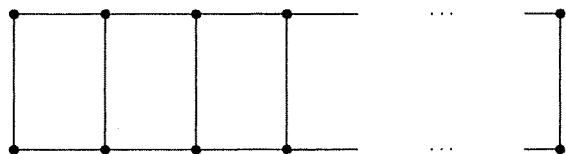
$$\text{Pokazać, że } p_G(k) = \frac{1}{k} p_{G_1}(k) \cdot p_{G_2}(k)$$

- (ii) Ile jest sposobów pokolorowania k kolorami wierzchołków następującego grafu? W ilu, spośród tych kolorowań, wszystkie wierzchołki $v_0, v_1, \dots, v_n$ będą tego samego koloru?



[O]

12. Pokazać przez indukcję względem n , że dla przedstawionego grafu, mającego $2n$ wierzchołków, wielomian chromatyczny ma postać $k(k-1)(k^2 - 3k + 3)^{n-1}$:



[W]

13. (i) Niech G będzie grafem i niech $e = uv$ będzie krawędzią grafu G . Przyjmijmy, że G_1 jest grafem otrzymanym z G przez usunięcie e , natomiast G_2 jest grafem otrzymanym z G przez usunięcie e i ściągnięcie wierzchołków u oraz v . Pokazać, że

$$p_G(k) = p_{G_1}(k) - p_{G_2}(k) \quad [W]$$

- (ii) Wywnioskować, że drzewo na n wierzchołkach ma wielomian chromatyczny $k(k-1)^{n-1}$. [W]

- (iii) Znaleźć najmniejszą parę nieizomorficznych grafów mających taki sam wielomian chromatyczny. [O]

14. Pokazać, że dla dowolnego grafu G jego wielomian chromatyczny ma postać

$$p_G(k) = k^{|V|} - |E|k^{|V|-1} + \text{mniejsze potęgi liczby } k \quad [W]$$

15. (Twierdzenie Stanleya, 1972) Acykliczna orientacja grafu $G = (V, E)$ jest uporządkowaniem każdej krawędzi uv albo jako $u \rightarrow v$, albo jako $v \rightarrow u$ w ten sposób, że nie istnieje cykl $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ spełniający $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$. (Jest to równoważne z postawieniem na każdej krawędzi strzałki, tak, aby nie utworzyć żadnego skierowanego cyklu).

Niech $G = (V, E)$ ma wielomian chromatyczny p_G . Pokazać, że G ma dokładnie $(-1)^{|V|} p_G(-1)$ acyklicznych orientacji. [W]

12

Wielomiany szachowe

W rozdziale tym zobaczymy, w jaki sposób różnego typu zagadnienia mogą być sprowadzone do problemów umieszczania „wież” na szachownicy.

Przykład: Cztery osoby A, B, C i D mają otrzymać pracę a, b, c oraz d w ten sposób, że każda z nich otrzyma jedną posadę. Osoba A nie będzie wykonywała prac b oraz c , B nie będzie wykonywała pracy a , C nie będzie wykonywała prac a, b oraz d , natomiast osoba D nie będzie wykonywała prac c oraz d . Na ile różnych sposobów mogą być rozdzielone te cztery posady?

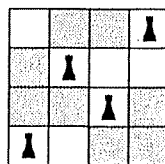
Rozwiązanie: Chwilowo nie będziemy rozwiązywać tego zagadnienia, lecz pokażemy, jak można je wyrazić poprzez problem dotyczący rozmieszczenia wież na szachownicy. Rozważmy tablicę ilustrującą zależności osoby/posady:

	a	b	c	d
A				
B				
C				
D				

Jeżeli przydzielimy pracę c , na przykład, osobie B , to postawimy znaczek na kwadracie odpowiadającym pozycji B/c . Zacieniowaliśmy więc te kwadraty, które odpowiadają przydziałowi pracy niewłaściwej osobie. Przydzielenie wszystkich czterech posad jest teraz równoważne z postawieniem czterech znaczków na nie zacieniowanej części tablicy tak, aby żadne dwa znaczki nie znalazły się w jednym wierszu lub kolumnie.

Jesteśmy już gotowi przeformułować problem, wykorzystując rozmieszczenia wież na szachownicy. Po pierwsze pomyślny o powyższym rysunku, jak o małej szachownicy. W szachach wieża może poruszać się wzdłuż wiersza lub kolumny. Zatem zbiór wież szachowych będzie takim, w którym wieże nie atakują się wzajemnie, jeżeli żadne dwie z nich nie są w tym samym wierszu lub kolumnie. W ten sposób powyższy problem przydziału prac jest równoważny z umieszczeniem nie

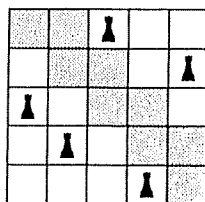
atakujących się wzajemnie wież na nie zacięniowanej części przedstawionej tablicy. Jeden z takich sposobów jest pokazany poniżej: jest on równoważny z przydziałem prac A/d , B/b , C/c oraz D/a .



□

Przykład: Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ takich, że żaden element i nie przechodzi na i oraz $i+1$?

Rozwiązanie: Ponownie nie podamy jeszcze rozwiązania, lecz pokażemy, jak sformułować ten problem, mając na uwadze wieże szachowe. Rozważmy nie zacięniowaną część tablicy wymiaru 5×5 pokazanej poniżej, na której chcemy umieścić pięć nie atakujących się wzajemnie wież szachowych (tj. żadne dwie nie mogą być w tym samym wierszu lub kolumnie): jedno takie rozmieszczenie jest przedstawione poniżej.



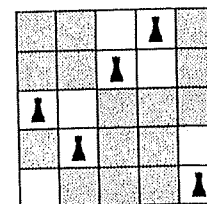
Jaki jest związek takich rozmieszczeń z permutacjami? Jeżeli przyjmiemy, że wieża stojąca w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie oznacza, że i jest przyporządkowane j , to powyższe rozmieszczenie odpowiada odwzorowaniu $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 5$, $3 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 2$ i $5 \rightarrow 4$. Fakt, że żadne dwie wieże nie są w tym samym wierszu lub kolumnie, zapewnia, że to odwzorowanie będzie permutacją zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, a przez wyeliminowanie zacięniowanych kwadratów sprawiliśmy, że żaden element i nie przechodzi na i oraz $i+1$. W ten sposób żądana liczba permutacji jest dokładnie liczbą sposobów rozmieszczenia pięciu nie atakujących się wzajemnie wież szachowych na nie zacięniowanej części przedstawionej tablicy wymiaru 5×5 .

□

Przykład: Na ile sposobów można dodać do przedstawionego prostokąta łacińskiego wymiaru 3×5 czwarty wiersz tak, aby otrzymać prostokąt łaciński wymiaru 4×5 (o elementach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$)?

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie: Łatwo można zauważyć, że dodanie czwartego wiersza jest równoważne z postawieniem pięciu nie atakujących się wzajemnie wież szachowych na nie zacięniowanej części tablicy, pokazanej poniżej; na przykład podane rozmieszczenie odpowiada nowemu wierszowi w postaci $(3, 4, 2, 1, 5)$.



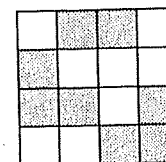
□

Przykłady te pokazują, w jaki sposób pewne problemy mogą być przedstawione w terminologii umieszczania wież szachowych na tablicy. Wyobraźmy sobie, że mamy do dyspozycji gigantyczną szachownicę (dowolnego, skończonego wymiaru, powiedzmy $n \times n$) i że wybieramy podzbiór jej kwadratów, których wolno użyć: kwadraty te będą tworzyły naszą „tablicę”. Mając daną taką tablicę B , definiujemy jej wielomian szachowy jako

$$r_B(x) = 1 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + \dots + r_kx^k + \dots + r_nx^n$$

gdzie r_k jest liczbą sposobów umieszczenia na tablicy B nie atakujących się wzajemnie k wież szachowych. (W rzeczywistości wielomian szachowy jest kolejnym przykładem funkcji tworzącej i, tak jak poprzednio, nigdy nie będzie nas interesowała żadna konkretna wartość zmiennej x).

Przykłady: Wyznaczyć wielomian szachowy przedstawionej tablicy wymiaru 4×4 , związanej z problemem przydziału prac, który rozpoczął ten rozdział.



Rozwiązanie: Wkrótce przedstawimy metody wyznaczające wielomiany szachowe, teraz zauważmy tylko, że jedna wieża szachowa może być postawiona na powyższej szachownicy na osiem różnych sposobów (tzn. mamy osiem dostępnych kwadratów na tej tablicy). Żmudne i ostrożne przeliczenia pokazują, że dwie wieże szachowe mogą zostać ustawione na tablicy (jak zawsze nie atakując się wzajemnie) na 19 różnych sposobów, trzy wieże mogą zostać ustawione na 14 różnych sposobów, a cztery wieże tylko na dwa sposoby. Tak więc odpowiadający tej tablicy wielomian szachowy ma postać

$$1 + 8x + 19x^2 + 14x^3 + 2x^4$$

□

Zamiana jednego problemu na inny, równoważny, niekoniecznie czyni jego rozwiązanie łatwiejszym. Jednakże w przypadku wielomianów szachowych będziemy mogli wykorzystać pewne nasze wcześniejsze rozważania (w tym także zależności rekurencyjne i zasadę włączania/wyłączania), które pomogą wyznaczyć rozwiązanie w łatwiejszy sposób. To umożliwi nam rozwiązanie powyższych zadań, oraz całego szeregu innych, kombinatorycznych problemów.

Nasz pierwszy „pracooszczędny” zabieg będzie dotyczył tablic, które mogą być rozdzielone na dwie części, z których jedna nie ma jakiegokolwiek wpływu na drugą.

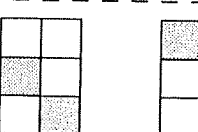
Przykład: W przykładzie dotyczącym prostokąta łacińskiego na stronie 156, skonstruowaliśmy następującą tablicę:

Pozostawiamy jako bezpośrednie, lecz jednocześnie żmudne zadanie, pokazanie, że ta tablica B ma wielomian szachowy

$$r_B(x) = 1 + 10x + 35x^2 + 50x^3 + 26x^4 + 4x^5$$

Interesująca nas tablica ma tę własność, że może być rozcięta na dwie tablice C i D , nie mające wspólnych wierszy i kolumn:

C		$r_C(x) = 1 + 4x + 2x^2$

D		$r_D(x) = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3$

Zauważmy, że

$$1 + 10x + 35x^2 + 50x^3 + 26x^4 + 4x^5 = (1 + 4x + 2x^2)(1 + 6x + 9x^2 + 2x^3)$$

to jest

$$r_B(x) = r_C(x) \cdot r_D(x)$$

i ta zależność będzie prawdziwa dla dowolnej pary tablic, które nie pokrywają się. $\square$

Twierdzenie: Niech B będzie tablicą, która może być podzielona na dwie części C i D , nie mające wspólnych wierszy i kolumn. Wówczas

$$r_B(x) = r_C(x) \cdot r_D(x)$$

Dowód: Aby udowodnić podaną zależność pokażemy, że współczynnik przy x^k (dla dowolnego k) jest taki sam po obu stronach zależności. Ponieważ umieszczenie wież na C nie ogranicza sposobów umieszczenia wież na D (i na odwrót), łatwo można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \text{współczynnik przy } x^k \text{ w } r_B(x) &= \text{liczba sposobów umieszczenia } k \text{ wież na } B \\ &= (\text{liczba sposobów umieszczenia } 0 \text{ wież na } C \text{ i } k \text{ na } D) \\ &\quad + (\text{liczba sposobów umieszczenia } 1 \text{ wieży na } C \text{ i } k-1 \text{ na } D) \\ &\quad + (\text{liczba sposobów umieszczenia } 2 \text{ wież na } C \text{ i } k-2 \text{ na } D) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (\text{liczba sposobów umieszczenia } k \text{ wież na } C \text{ i } 0 \text{ na } D) \\ &= (\text{współ. przy } x^0 \text{ w } r_C(x)) \cdot (\text{współ. przy } x^k \text{ w } r_D(x)) \\ &\quad + (\text{współ. przy } x^1 \text{ w } r_C(x)) \cdot (\text{współ. przy } x^{k-1} \text{ w } r_D(x)) \\ &\quad + (\text{współ. przy } x^2 \text{ w } r_C(x)) \cdot (\text{współ. przy } x^{k-2} \text{ w } r_D(x)) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (\text{współ. przy } x^k \text{ w } r_C(x)) \cdot (\text{współ. przy } x^0 \text{ w } r_D(x)) \\ &= \text{współczynnik przy } x^k \text{ w } r_C(x) \cdot r_D(x) \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Przykład: Tablica przedstawionego typu, ale zawierająca n kwadratów, które nie zostały zacieniowane, ma wielomian szachowy $(1+x)^n$.

Można to łatwo przetestować lub udowodnić metodą indukcji, lub też, mniej formalnie, brać pod uwagę to, że tablica zawiera n małych tabliczek wymiaru 1×1 , z których żadne dwie nie mają wspólnego wiersza i kolumny. Każda z tych małych tabliczek ma wielomian szachowy $1+x$, a więc, na mocy naturalnego uogólnienia

poprzedniego twierdzenia, wielomian szachowy zadanej tablicy jest iloczynem n poszczególnych wielomianów. $\square$

Szukając, w poprzednim rozdziale, wielomianu chromatycznego grafu, konstruowaliśmy z niego dwa grafy i próbowaliśmy znaleźć ich wielomiany chromatyczne (jeżeli było to w dalszym ciągu skomplikowane, powtarzaliśmy procedurę). W ten sposób stosowaliśmy podejście algorytmiczne oparte na zależności rekurencyjnej. Wykorzystamy teraz niczym nie różniącą się procedurę w celu znalezienia wielomianu szachowego tablicy.

Twierdzenie: Niech B będzie tablicą i niech s oznacza jeden określony kwadrat tej tablicy. Wówczas niech B_1 będzie tablicą otrzymaną z B przez usunięcie kwadratu s i niech B_2 będzie tablicą otrzymaną z B przez usunięcie całego wiersza i kolumny zawierającej s . Wtedy

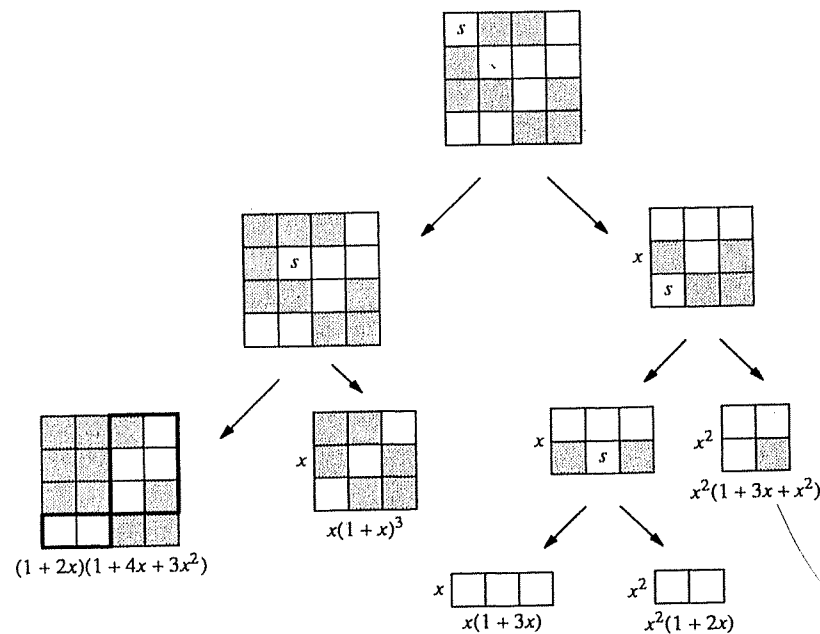
$$r_B(x) = r_{B_1}(x) + x r_{B_2}(x)$$

Dowód: Tak jak poprzednio, aby dowieść podanej tożsamości, pokażemy, że współczynnik przy x^k (dla dowolnego k) jest identyczny po obu jej stronach: każdy z następujących kroków może być łatwo uzasadniony przez czytelnika.

Współczynnik przy x^k w $r_B(x)$ = liczba sposobów umieszczenia k wież na B
 = (liczba sposobów umieszczenia k wież na B bez użycia s)
 + (liczba sposobów umieszczenia k wież na D przy użyciu s)
 = (liczba sposobów umieszczenia k wież na B_1)
 + (liczba sposobów umieszczenia $k-1$ wież na B_2)
 = (współczynnik przy x^k w $r_{B_1}(x)$)
 + (współczynnik przy x^{k-1} w $r_{B_2}(x)$)
 = (współczynnik przy x^k w $r_{B_1}(x)$)
 + (współczynnik przy x^k w $x r_{B_2}(x)$)
 = współczynnik przy x^k w $r_{B_1}(x) + x r_{B_2}(x)$

W ten sposób $r_B(x) = r_{B_1}(x) + x r_{B_2}(x)$ i twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Przykład: Zanim rozwinie jedną z kolejnych technik, zastosujemy dwa poprzednie twierdzenia do wyznaczenia raz jeszcze wielomianu szachowego tablicy B , związanej z problemem przydziału pracy, od którego rozpoczęliśmy ten rozdział. W każdym kroku wybierzmy kwadrat s i narysujmy B_1 poniżej B z jego lewej strony oraz B_2 (z dodatkowym czynnikiem x) poniżej B z jego prawej strony.



Stąd

$$\begin{aligned} r_B(x) &= (1+2x)(1+4x+3x^2) + x(1+x)^3 + x(1+3x) \\ &\quad + x^2(1+2x) + x^2(1+3x+x^2) \\ &= 1+8x+19x^2+14x^3+2x^4 \end{aligned}$$

tak jak poprzednio. $\square$

Przykład ten pokazuje, że łącząc poprzednie dwa twierdzenia, otrzymujemy całkiem elegancką metodę, wyznaczającą dowolny wielomian szachowy. Niestety, te rezultaty są raczej nieatrakcyjne i same w sobie nie są wystarczające, aby dać nam możliwość eleganckiego rozwiązania jakiegokolwiek problemu, którego nie mogliśmy przedtem rozwiązać. Wyprowadzimy teraz trzeci wynik, dotyczący wielomianów szachowych, który jest o wiele bardziej interesujący i który umożliwi nam rozwiązywanie dość trudnych problemów.

Przykład: Tablica B przedstawiona poniżej po lewej stronie jest tablicą, którą skonstruowaliśmy dla przykładu o prostokacie łacińskim na stronach 156–157. Tablica $\bar{B}$ po prawej stronie jest „dopełnieniem” do B , to jest $\bar{B}$ składa się z zacięniowanych kwadratów tablicy B . Wielomiany szachowe tablic B i $\bar{B}$ zostały

zapisane pod nimi, $(r_B(x))$ został wyznaczony wcześniej; bardzo dociekliwy czytelnik może sprawdzić poprawność $r_B(x)$.

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} \\ \hline \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} \\ \hline \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} \\ \hline \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} \\ \hline \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} \\ \hline \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} \\ \hline \end{array}$$

$$r_B(x) = 1 + 10x + 35x^2 + 50x^3 + 26x^4 + 4x^5$$

$$\bar{B} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} & \text{white} \\ \hline \end{array}$$

$$r_{\bar{B}}(x) = 1 + 15x + 75x^2 + 145x^3 + 96x^4 + 12x^5$$

Okazuje się, że współczynniki tych dwóch wielomianów są powiązane ze sobą w bynajmniej nie oczywisty sposób:

$$\begin{aligned} \text{współczynniki w } r_B(x): & \quad 1, \quad 10, \quad 35, \quad 50, \quad 26, \quad 4 \\ \text{Zauważmy, że } & \quad 5! \times 1 - 4! \times 10 + 3! \times 35 - 2! \times 50 + 1! \times 26 - 0! \times 4 \\ & = 120 - 240 + 210 - 100 + 26 - 4 \\ & = 12 \end{aligned}$$

jest współczynnikiem przy x^5 w wielomianie $r_{\bar{B}}(x)$!

Podobnie,

$$\begin{aligned} \text{współczynniki w } r_{\bar{B}}(x): & \quad 1, \quad 15, \quad 75, \quad 145, \quad 96, \quad 12 \\ \text{oraz } & \quad 5! \times 1 - 4! \times 15 + 3! \times 75 - 2! \times 145 + 1! \times 96 - 0! \times 12 \\ & = 120 - 360 + 450 - 290 + 96 - 12 \\ & = 4 \end{aligned}$$

jest współczynnikiem przy x^5 w wielomianie $r_B(x)$! $\square$

Twierdzenie: Niech B będzie częścią tablicy wymiaru $n \times n$, mającą wielomian szachowy postaci

$$r_B(x) = 1 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n$$

i niech $\bar{B}$ będzie dopełnieniem do B względem całej tablicy. Wówczas liczba sposobów rozmieszczenia na $\bar{B}$ n wież szachowych, które nie atakują się wzajemnie, jest równa

$$n! - (n-1)!r_1 + (n-2)!r_2 - \dots + (-1)^n 0!r_n$$

Dowód: Skorzystamy z zasady włączania/wyłączania ze strony 55. Aby zastosować ją, potrzebujemy zbiór obiektów i pewne własności, które mogą, ale nie muszą, te obiekty mieć. Niech zbiorem obiektów będą możliwe układy n wież (na nie atakujących się wzajemnie pozycjach) na całej tablicy wymiaru $n \times n$: jest ich $n!$ i w każdym układzie jest dokładnie jedna wieża w każdym wierszu. Niech możliwe własność 1, 2, ..., n dla każdego układu będą określone następująco:

własność 1 oznacza, że wieża w pierwszym wierszu należy do B ;

własność 2 oznacza, że wieża w drugim wierszu należy do B ;

własność n oznacza, że wieża w n -tym wierszu należy do B .

Wtedy liczba sposobów rozmieszczenia n (nie atakujących się) wież na $\bar{B}$ jest dokładnie liczbą tych spośród $n!$ układów, które nie mają żadnej z rozważanych n własności. Na mocy zasady włączania/wyłączania liczba ta wynosi

$$\begin{aligned} n! - & N(1) - N(2) - \dots - N(n) \\ + & N(1,2) + N(1,3) + \dots + N(n-1,n) \\ - & N(1,2,3) - N(1,2,4) - \dots - N(n-2,n-1,n) \\ & \vdots \\ + & (-1)^n N(1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

gdzie, w standardowej notacji dotyczącej zasady włączania/wyłączania, $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$ oznacza liczbę układów, które mają co najmniej r różnych własności $i_1, i_2, \dots, i_r$.

Jak możemy teraz obliczyć $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$? Rozważmy, dla przykładu, $N(1,2,3)$. Wyrażenie to jest równe liczbie sposobów umieszczenia trzech wież w wierszach 1, 2 i 3 tablicy B , po czym pozostałe $n-3$ wieże mogą być dowolnie postawione w pozostałych wierszach i kolumnach na $(n-3)!$ sposoby. Stąd

$$\begin{aligned} & N(1,2,3) + N(1,2,4) + \dots + N(n-2,n-1,n) \\ & = (n-3)! \times (\text{liczba sposobów umieszczenia na } B \text{ wież} \\ & \quad \text{w wierszach 1, 2 i 3}) \\ & + (n-3)! \times (\text{liczba sposobów umieszczenia na } B \text{ wież} \\ & \quad \text{w wierszach 1, 2 i 4}) \\ & \vdots \\ & + (n-3)! \times (\text{liczba sposobów umieszczenia na } B \text{ wież} \\ & \quad \text{w wierszach } n-2, n-1 \text{ i } n) \\ & = (n-3)! \times (\text{liczba sposobów umieszczenia gdziekolwiek na } B \\ & \quad \text{trzech wież}) \\ & = (n-3)!r_3 \end{aligned}$$

W podobny sposób

$$N(1,2,3,4) + N(1,2,3,5) + \dots + N(n-3,n-2,n-1,n) = (n-4)!r_4$$

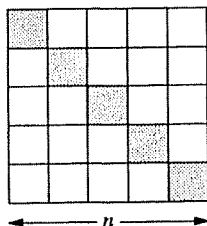
itd. Tak więc liczba sposobów rozmieszczenia n wież na $\bar{B}$ wynosi

$$\begin{aligned} n! - & N(1) - N(2) - \dots - N(n) + N(1,2) + \dots + (-1)^n N(1,2,\dots,n) \\ & = n! - (n-1)!r_1 + (n-2)!r_2 - \dots + (-1)^n 0!r_n \end{aligned}$$

co było do udowodnienia. $\square$

Przykład: W rozdziale 5 wyznaczyliśmy liczbę nieporządków zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ (tj. permutacji, w których $1 \neq 1, 2 \neq 2, \dots, n \neq n$.) Tym razem wyprowadzimy ten rezultat, stosując wielomiany szachowe.

Liczba nieporządków zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest liczbą sposobów rozmieszczenia n wież szachowych na następującej tablicy wymiaru $n \times n$:



(Rzeczywiście, jeżeli, tak jak poprzednio, przyjmiemy, że wieża stojąca w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie oznacza, że $i \rightarrow j$, to usunięte (zaciemnione) kwadraty zapewniają, że istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność między układami n wież szachowych na tej tablicy a nieporządkami zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$).

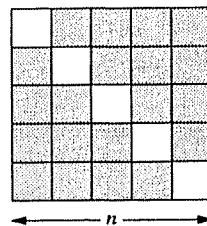
Na mocy powyższego twierdzenia liczba sposobów rozmieszczenia n wież na zadanej tablicy wynosi

$$n! - (n-1)!r_1 + (n-2)!r_2 - \dots + (-1)^n 0!r_n$$

gdzie

$$1 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n$$

jest wielomianem szachowym dla tablicy



Widzieliśmy wcześniej, że taka tablica ma wielomian szachowy postaci $(1+x)^n$, a więc $r_k = \binom{n}{k}$ i wynika stąd, że liczba nieporządków zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ wynosi

$$n! - (n-1)!r_1 + (n-2)!r_2 - \dots + (-1)^n 0!r_n$$

$$= n! - (n-1)! \binom{n}{1} + (n-2)! \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

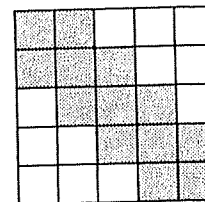
$$= n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

tak jak poprzednio. □

Możemy teraz zastosować nasze wyniki, dotyczące wielomianów szachowych, do rozwiązania pewnych interesujących problemów kombinatorycznych. Chcąc, by czytelnik wyniósł jak największą korzyść (i przyjemność) z tych rozwiązań, problemy te pozostawiamy jako zadania wraz z wieloma wskazówkami.

ZADANIA

1. Czy jakiś wielomian może być jednocześnie wielomianem szachowym tablicy oraz wielomianem chromatycznym grafu? [O]
2. (i) Znaleźć wielomian szachowy następującej, nie zaciemnionej tablicy:



[O]

- (ii) Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, w których żadne i nie przechodzi na $i-1$, i oraz $i+1$? Ile jest takich, w których każde i przechodzi na $i-1$ lub i , lub $i+1$? [O]

3. Stosując wielomiany szachowe, wyznaczyć ilość uporządkowań liczb 1, 2, 3, 4, 5, w których kolejne liczby tworzące uporządkowanie są odpowiednio elementami zbiorów $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ i $\{1, 3, 4, 5\}$. [W,O]

4. Niech

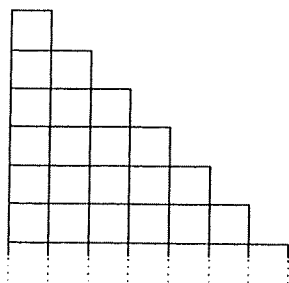
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zastosować wszystkie trzy twierdzenia z tego rozdziału do wyznaczenia liczby sposobów dodania trzeciego wiersza do L , aby otrzymać prostokąt łaciński wymiaru 3×5 o elementach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ [W,O]

Potwierdzić otrzymaną odpowiedź, stosując bezpośrednie przeliczenie i wywnioskować, że można rozszerzyć L do kwadratu łacińskiego wymiaru 5×5 na co najmniej 24 różne sposoby.

5. Rozważmy tablicę wymiaru $n \times n$, w której kwadraty pokolorowane są na czarno i na białą w sposób charakterystyczny dla szachownicy, z co najmniej jednym białym narożnikiem.

- (i) Ile jest sposobów rozmieszczenia na białych kwadratach n wież, które nie atakują się wzajemnie? [O]
- (ii) Ile jest sposobów rozmieszczenia na czarnych kwadratach n wież, które nie atakują się wzajemnie? [O]
6. Niech B będzie tablicą związaną z problemem przydziału prac, który rozpoczął ten rozdział. Sprawdzić, że dopełnienie $\bar{B}$ względem całej tablicy wymiaru 4×4 ma ten sam wielomian szachowy co B .
- W ogólności pokazać, że jeżeli część tablicy i jej dopełnienie w tablicy wymiaru $n \times n$ mają takie same wielomiany szachowe, to n oraz liczba sposobów postawienia na tablicy jednej wieży i $n - 1$ nie atakujących się wzajemnie wież są parzyste. [W]
7. Rozważmy tablicę jak ta przedstawiona poniżej, lecz mającą n wierszy:



Pokazać, że jej wielomian szachowy jest postaci

$$1 + S(n+1, n)x + S(n+1, n-1)x^2 + S(n+1, n-2)x^3 + \dots + S(n+1, 1)x^n$$

gdzie współczynnikami są liczby Stirlinga drugiego rodzaju, zdefiniowane w zadaniu 11 na stronie 142. [W]

8. Niech B będzie częścią tablicy wymiaru $n \times n$, mającą wielomian szachowy

$$r_B(x) = 1 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n$$

Również, dla $0 \leq k \leq n$, niech b_k oznacza liczbę sposobów ustawienia n nie atakujących się wzajemnie wież szachowych na całej tablicy wymiaru $n \times n$, z których dokładnie k leży w B . Pokazać, że dla $0 \leq k \leq n$

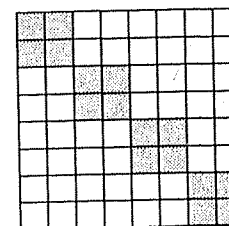
$$\binom{k}{k} b_k + \binom{k+1}{k} b_{k+1} + \binom{k+2}{k} b_{k+2} + \dots + \binom{n}{k} b_n = r_k(n-k)! \quad [W]$$

Wynioskować, że

$$\begin{aligned} n! + r_1(n-1)!x + r_2(n-2)!x^2 + \dots + r_n 0!x^n \\ = b_0 + b_1(1+x) + b_2(1+x)^2 + \dots + b_n(1+x)^n \end{aligned}$$

Korzystając z tego wyniku, podać alternatywny dowód twierdzenia, dotyczącego dopełniających się tablic (w rzeczywistości można zastosować inwersję do wyrażenia b_k poprzez $r_k, r_{k+1}, \dots, r_n$).

9. (i) Zapisać wielomian szachowy dla całej tablicy wymiaru $n \times n$. [O]
- (ii) Ile jest sposobów ustawienia ośmiu wież, które nie atakują się wzajemnie na przedstawionej nie zaciętej tablicy?



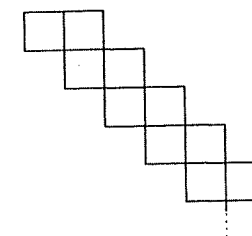
[O]

(iii) Mamy dwie talie kart, z których każda składa się z dwóch waletów, dwóch dam, dwóch króli i dwóch asów. Gra, zwana po angielsku „snap”, przypominająca do złudzenia grę w „wojnę”, ma następujące zasady: każda talia jest tasowana, a następnie są porównywane wierzchnie karty z każdej talii, potem są porównywane drugie karty z każdej z nich i tak dalej. „Wojna” jest w momencie, w którym wystąpią jednocześnie dwie jednakowe karty. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że w grze nie będzie „wojny” (tj. znaleźć proporcję wszystkich takich możliwych uporządkowań kart, w których nie ma żadnej „wojny”: można założyć, nie tracąc na ogólności, że uporządkowanie pierwszej talii jest ustalone). [W,O]

(iv) Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie wystąpi „wojna”, gdy porównujemy dwie standardowe talie złożone z 52 kart? (To zadanie jest tylko dla najgorliwszych czytelników: zasady są takie same jak w (iii), ale końcowe obliczenia wymagają komputera - lub niezwyklej cierpliwości!). [W,O]

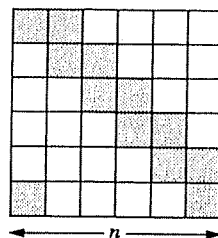
10. (Problem pani domu / *Le problème des ménages*)

(i) Zapisać wielomian szachowy tablicy przedstawionego typu, ale składającej się z m kwadratów:



[W,O]

(ii) Wyznaczyć wielomian szachowy zacieniowanej części następującej tablicy wymiaru $n \times n$:



Stąd wyznaczyć liczbę sposobów ustawienia na nie zacieniowanej tablicy n wież, które nie atakują się wzajemnie. [W,O]

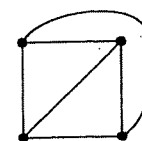
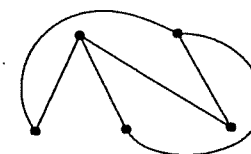
(iii) Na przyjęciu n par małżeńskich ma być posadzonych na $2n$ miejscach przy okrągłym stole w ten sposób, że mężczyźni i kobiety siedzą na przemian, a żaden mąż nie siedzi obok swojej żony. Na ile sposobów można to uczynić? [W,O]

13

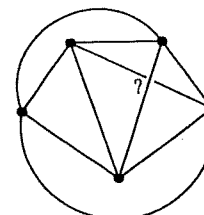
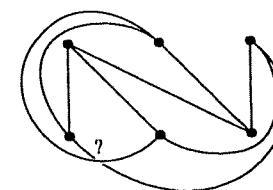
Grafy planarne

Wiemy już, że dowolny graf można przedstawić za pomocą rysunku, na którym pewne punkty płaszczyzny reprezentują wierzchołki grafu i dwa takie punkty są połączone linią (lub „krawędzią”), wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im w grafie wierzchołki łączą krawędź. Czasami udaje się narysować graf w ten sposób, że dowolne dwie linie „spotykają się” najwyżej w wierzchołku, który jest ich wspólnym wierzchołkiem końcowym.

Przykłady: Graf pełny K_4 i dwudzielny graf pełny $K_{2,3}$ mogą być narysowane w taki właśnie sposób:

 K_4  $K_{2,3}$

Próbując narysować podobnie grafy K_5 i $K_{3,3}$, napotykamy trudności:

 K_5  $K_{3,3}$

Jak wkrótce udowodnimy, rzeczywiście nie można narysować na płaszczyźnie tych dwóch grafów tak, aby żadne dwie krawędzie nie przecinały się. $\square$

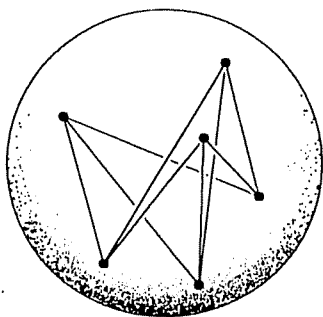
Mówimy, że graf $G = (V, E)$ jest *planarny*, jeżeli może być narysowany na płaszczyźnie tak, że dowolne dwie jego krawędzie „spotykają się” co najwyżej we wspólnym wierzchołku końcowym. Każdy rysunek takiego grafu jest jego

planarną reprezentacją. Powyższe przykłady pokazują, że K_4 i $K_{2,3}$ są grafami planarnymi, natomiast, jak zobaczymy później, K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.

Idea grafu planarnego oraz wywodzące się z niej pojęcia łączą dwa obszary matematyki — teorię grafów (która nade wszystko jest przedmiotem badań pewnych relacji) i geometrię powierzchni (która jest częścią topologii). Jak to często bywa w matematyce, skojarzenie dwóch różnych dyscyplin daje pewne interesujące wyniki. Chcąc zilustrować szeroką gamę ciekawych rezultatów, zachowując przy tym elementarny charakter prezentacji, pewne dowody, w tym i następnym rozdziale, będą tylko naszkicowane lub wręcz opuszczone. W szczególności własności geometryczno-topologiczne będą potraktowane w sposób zdawkowy i intuicyjny.

Wspomnijmy na marginesie, że chociaż jest niemożliwe narysowanie pewnych grafów na płaszczyźnie tak, że każde dwie krawędzie „spotykają się” co najwyżej w ich wierzchołku końcowym, to zawsze można przedstawić dowolny graf w przestrzeni trójwymiarowej, zachowując powyższą własność. Rzeczywiście, nie wdając się w szczegóły, jest racjonalnie zrozumiałe, że można wybrać na powierzchni kuli dowolną skończoną liczbę punktów w ten sposób, że żadne cztery punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie. Traktując te punkty jako wierzchołki grafu oraz odcinki między odpowiednimi parami wierzchołków jako krawędzie, otrzymujemy „nie przecinającą się prostoliniową” reprezentację zadanego grafu (to znaczy, dowolne dwie krawędzie nie przecinają się w żadnym punkcie, z wyjątkiem najwyżej ich wspólnego wierzchołka końcowego, oraz każda krawędź jest reprezentowana odcinkiem linii prostej).

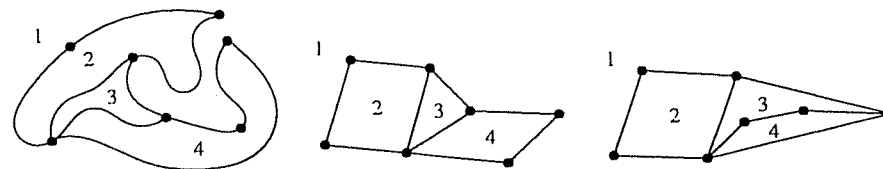
Przykład: „Nie przecinająca się prostoliniowa” reprezentacja grafu $K_{3,3}$ w przestrzeni trójwymiarowej:



□

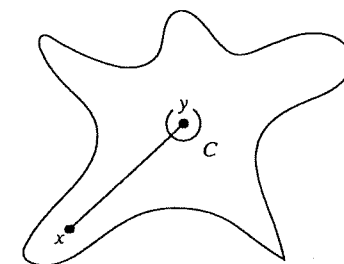
Mając daną planarną reprezentację grafu, można rozpatrywać zbiór punktów na płaszczyźnie, które nie należą do tej reprezentacji: zbiór ten w sposób naturalny dzieli się na „kawałki” (bardziej formalnie, są to maksymalne topologicznie spójne podzbiory), zwane *regionami* reprezentacji.

Przykład: Wszystkie poniżej przedstawione figury są planarnymi reprezentacjami tego samego grafu: w każdym przypadku regiony zostały ponumerowane, przy czym region 1 jest „nieskończony”, a pozostałe są „skończone”.



Pierwsze dwie reprezentacje są zasadniczo takie same (lub „równoważne”), trzecia zaś nie, bo na przykład zawiera region, którego granica składa się z pięciu krawędzi, a takiego regionu nie mają pozostałe dwie reprezentacje. □

Warto zauważyć, iż daną planarną reprezentację grafu, można „zniekształcić”, zachowując „zasadniczo to samo” ułożenie wierzchołków, krawędzi i regionów w ten sposób, że każda krawędź będzie reprezentowana przez odcinek linii prostej. Ten zaskakujący wynik został udowodniony niezależnie przez K. Wagnera w 1936 r. oraz I. Fáry’ego w 1948 r. Przedstawimy tutaj trochę ogólniejszy rezultat i naszkicujemy jego dowód. W tym celu będzie potrzebne pojęcie zbioru o kształcie gwiazdy: zbiór S leżący na płaszczyźnie nazywa się „zbiorem o kształcie gwiazdy”, jeżeli istnieje zawarty w nim okrąg C (o dodatnim promieniu) taki, że dla każdego punktu $x \in S$ oraz $y \in C$ odcinek prostej od x do y leży całkowicie w S .

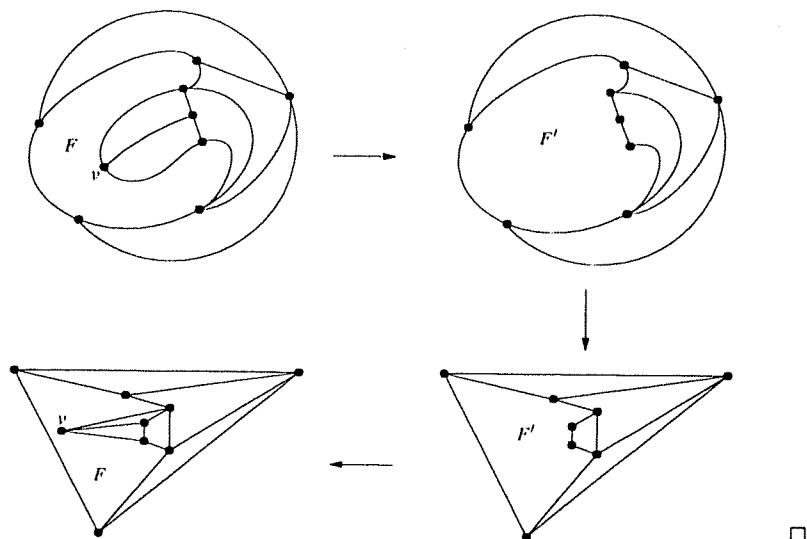


Zbiór S o kształcie gwiazdy

Twierdzenie: (Fáry’ego/Wagnera) Dla dowolnej reprezentacji planarnej grafu G i dowolnego skończonego regionu F , którego granicą jest cykl, istnieje równoważna reprezentacja grafu G , w której każda krawędź jest reprezentowana przez odcinek linii prostej, a region F jest zbiorem o kształcie gwiazdy.

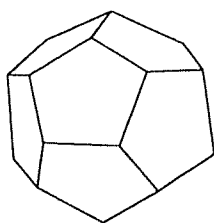
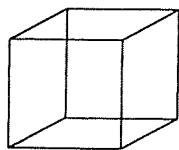
Szkic dowodu: Przeprowadzimy go przez indukcję względem liczby wierzchołków, przy czym początkowe przypadki są banalne. Założmy więc, że mamy planarną reprezentację grafu G oraz określony, skończony region F , ograniczony cyklem, i założmy, że wynik ten zachodzi dla mniejszych grafów. Naszkicujemy dowód dla grafu G w przypadku, gdy na granicy regionu F istnieje wierzchołek v , którego usunięcie wraz z krawędziami do niego dochodzącymi z planarnej reprezentacji powoduje, że F staje się częścią większego skończonego regionu F' , ograniczonego cyklem (tak jak pokazano na następnej stronie). Na podstawie założenia indukcyjnego pomniejszona reprezentacja może być przekształcona tak, że każda krawędź jest linią prostą, a F' jest zbiorem o kształcie gwiazdy. Możliwe jest zatem umieszczenie w F' wierzchołka v tak, by dochodzące do niego

krawędzie mogły z powrotem zostać dodane jako nie przecinające się linie proste, pozostawiając F' w postaci zbioru o kształcie gwiazdy i dając tym samym żadaną reprezentację grafu G :



Jak widzieliśmy już we wcześniejszym przykładzie, jest wiele różnych reprezentacji planarnych konkretnego grafu planarnego. Jednak, jak to miało miejsce w tym przykładzie, wszystkie one będą miały taką samą liczbę regionów. Uodwodnimy ten fakt za chwilę. Wynik wyznaczający liczbę regionów poprzez liczbę wierzchołków i krawędzi jest znany jako *wzór Eulera*, gdyż jest bardzo zbliżony do jego rezultatu, dotyczącego liczby ścian w wypukłym wielościanie. A tak naprawdę to Cauchy w 1813 r. istotnie uogólnił wynik Eulera na taki, który obejmował grafy planarne. (Więcej szczegółów o historycznym rozwoju tego zagadnienia można znaleźć w wielokrotnie już wspominatej książce *Graph theory 1736–1936*).

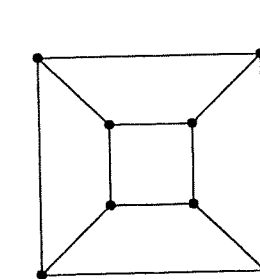
Przykład: Rysunek z lewej strony pokazuje szkielet sześciannu. Stosując tradycyjną terminologię dla takich brył sześciann ten ma 8 wierzchołków, 12 krawędzi i 6 ścian. Dwunastościan, przedstawiony po prawej stronie, ma 20 wierzchołków, 30 krawędzi i 12 ścian.



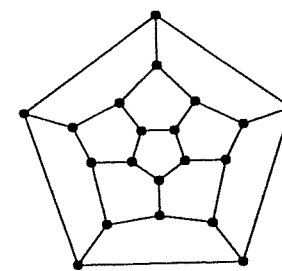
W każdym przypadku

$$\text{liczba ścian} = \text{liczba krawędzi} - \text{liczba wierzchołków} + 2$$

i to właśnie ten ogólny wynik, zachodzący dla wszystkich takich brył (wypukłych wielościanów), został podany przez Eulera w 1752 r. Każda z tych brył może być przedstawiona w postaci pewnej „mapy” na płaszczyźnie, jak to pokazano poniżej. W każdym przypadku otrzymujemy planarną reprezentację grafu przy czym wierzchołki/krawędzie/ściany danej bryły stają się wierzchołkami/krawędziami/regionami tej planarnej reprezentacji.



$$G = (V, E) \\ \text{liczba regionów} = |E| - |V| + 2$$



$$G = (V, E) \\ \text{liczba regionów} = |E| - |V| + 2$$

□

Twierdzenie: (Wzór Eulera) Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem planarnym. Wówczas w dowolnej planarnej reprezentacji grafu G liczba regionów jest równa $|E| - |V| + 2$.

Dowód: Przeprowadzimy go metodą indukcji względem liczby cykli zawartych w G . Jeżeli graf nie zawiera cykli, to jest on drzewem i jest oczywiste, że każda jego planarna reprezentacja będzie miała dokładnie jeden region. Wiemy, że dla drzewa $|E| = |V| - 1$, czyli w tym przypadku

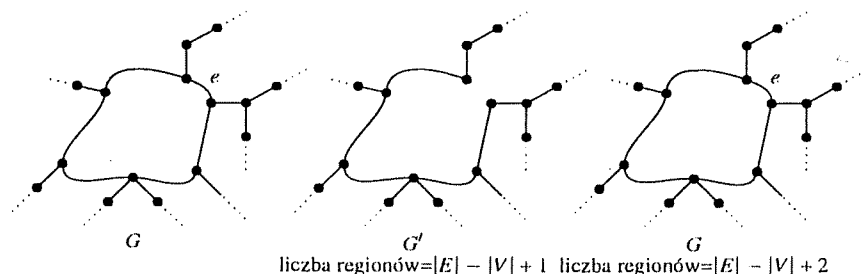
$$|E| - |V| + 2 = 1 = \text{liczba regionów}$$

jak żądaliśmy. Załóżmy więc, że graf planarny G ma co najmniej jeden cykl i że wynik jest prawdziwy dla grafów o mniejszej liczbie cykli. Rozważmy planarną reprezentację grafu G . Niech e będzie krawędzią w G , należącą do jednego z tych cykli. Niech $G' = (V, E \setminus \{e\})$ będzie grafem, otrzymanym z G przez usunięcie krawędzi e . Wówczas usunięcie e z danej planarnej reprezentacji grafu G daje planarną reprezentację grafu G' . Ponadto G' jest spójny i ma mniej cykli niż G . Możemy więc zastosować założenie indukcyjne do reprezentacji grafu $G' = (V, E \setminus \{e\})$ otrzymując

$$\text{liczba regionów w reprezentacji grafu } G' = |E \setminus \{e\}| - |V| + 2 = |E| - |V| + 1$$

Jaki wpływ na liczbę regionów będzie miało wstawienie na swoje miejsce w tej reprezentacji brakującej krawędzi e ? Ponieważ e była częścią cyklu, jej wstawie-

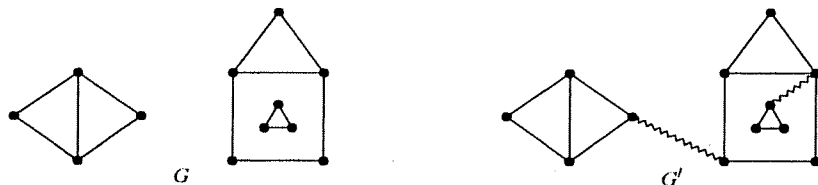
nie podzieli jakiś region w reprezentacji grafu G' na dwa regiony, jak to zilustrowano poniżej.



W ten sposób dana planarna reprezentacja grafu G rzeczywiście ma $|E| - |V| + 2$ regiony. To kończy dowód przez indukcję. $\square$

Wniosek pierwszy: Niech $G = (V, E)$ będzie planarnym grafem o k składowych. Wówczas, w dowolnej planarnej reprezentacji grafu G , liczba regionów jest równa $|E| - |V| + k + 1$.

Dowód: Gdy mamy daną dowolną reprezentację grafu G , wówczas dodanie pewnych $k - 1$ krawędzi połączy składowe i da w efekcie planarną reprezentację spójnego grafu planarnego $G' = (V, E')$ z taką samą liczbą regionów jak poprzednio; tj.



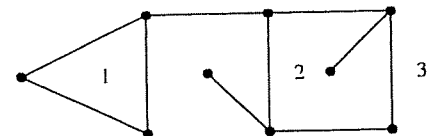
Na podstawie wzoru Eulera liczba regionów w planarnej reprezentacji grafu G' (a tym samym w grafie G) wynosi

$$|E'| - |V| + 2 = (|E| + k - 1) - |V| + 2 = |E| - |V| + k + 1$$

co było do udowodnienia. $\square$

Zauważmy, że ze wzoru Eulera nie możemy stwierdzić, czy graf spełniający taką zależność jest planarny, gdyż twierdzenie ma postać „jeżeli G jest planarny, to ...”. Jednakże wzór ten umożliwia wnioskowanie, że pewne grafy *nie* są planarne. W tym celu podamy teraz kilka dalszych wniosków z przedstawionego twierdzenia. W niektórych ich dowodach będziemy musieli policzyć krawędzie, tworzące granicę danego regionu. Nie ma żadnego problemu, gdy region jest ograniczony cyklem, ale w ogólnym przypadku, jeżeli „obie strony” krawędzi są częścią granicy tego samego regionu, to krawędź ta jest wówczas liczona dwukrotnie jako krawędź tworząca granicę.

Przykład: W tym przykładzie region 1 ma granicę złożoną z trzech krawędzi, region 2 z sześciu krawędzi, a region 3 z jedenastu.



W tej sytuacji liczba krawędzi tworzących wszystkie granice wynosi 20, co jest podwojoną liczbą krawędzi. Własność ta będzie zawsze spełniona, gdyż każda krawędź (mając „dwie strony”), jest liczona dwukrotnie jako krawędź tworząca granicę regionu. $\square$

Wniosek drugi: Jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem planarnym, takim że $|V| \geq 3$, to

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Dowód: Możemy założyć, że G jest spójny (w przeciwnym bowiem razie mogliśmy dodać odpowiednie krawędzie tak, by graf ten stał się spójny, a następnie wywnioskowalibyśmy tę nierówność dla nowego grafu, a więc również dla grafu G). Rozważmy dowolną planarną reprezentację grafu G i niech f będzie liczbą regionów w tej reprezentacji. Założenie $|V| \geq 3$ gwarantuje, że każdy region jest ograniczony przez co najmniej trzy krawędzie, a więc ogólna liczba krawędzi tworzących granice (licząc krawędź za każdym razem, gdy pojawi się na granicy) jest równa co najmniej $3f$. Ale, jak wspomnieliśmy powyżej, ogólna liczba krawędzi tworzących granice jest równa dokładnie $2|E|$ (gdyż każda krawędź jest liczona tutaj dwukrotnie). W ten sposób

$$2|E| \geq 3f = 3(|E| - |V| + 2)$$

co kończy dowód żądanej nierówności. $\square$

Przykład: Pokazać, że graf K_5 nie jest planarny.

Rozwiązanie: Gdyby K_5 był planarny, wówczas na podstawie poprzedniego wniosku mielibyśmy

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Ale dla grafu pełnego na pięciu wierzchołkach $|V| = 5$ i $|E| = 10$. Tak więc $|E| \not\leq 3|V| - 6$. Stąd K_5 nie jest planarny. $\square$

Następne dwa wnioski praktycznie powtarzają poprzedni, nieznacznie go wzmacniając.

Wniosek trzeci: Jeżeli $G = (V, E)$ jest planarnym grafem dwudzielnym, takim że $|V| \geq 3$, to

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Dowód: Przypomnijmy najpierw, że graf dwudzielnym nie ma cykli składających się z nieparzystej liczby krawędzi: wynika stąd, że granica każdego regionu w planarnej reprezentacji grafu dwudzielnego musi składać się z parzystej liczby krawędzi. W ten sposób żadna granica nie ma dokładnie trzech krawędzi. Zatem

granica każdego regionu składa się z co najmniej czterech krawędzi. Mając na uwadze to niewielkie udoskonalenie, możemy postąpić dokładnie tak samo, jak w dowodzie drugiego wniosku, otrzymując:

$$\begin{array}{l} \text{zastąp '3'} \\ \text{przez '4'} \end{array} \quad 2|E| \geq \underset{4}{\beta} (|E| - |V| + 2)$$

skąd wynika już żądana nierówność. $\square$

Przykład: Pokazać, że graf $K_{3,3}$ nie jest planarny.

Rozwiązanie: Dla tego dwudzielnego grafu pełnego mamy $|V| = 6$, $|E| = 9$, a więc $|E| \not\leq 2|V| - 4$. Stąd, na podstawie poprzedniego wniosku, $K_{3,3}$ nie jest planarny. $\square$

Wniosek czwarty: Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym, zawierającym cykl i , w którym liczba krawędzi w najkrótszym cyklu jest równa r (liczba ta nazywa się *obwodem* grafu G). Wówczas

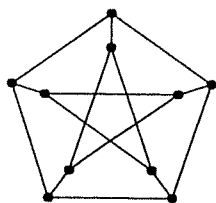
$$(r-2)|E| \leq r(|V| - 2)$$

Dowód: W jakiegokolwiek planarnej reprezentacji grafu G każdy region ma granicę złożoną z co najmniej r krawędzi. W ten sposób, wzmacniając jeszcze bardziej wniosek drugi,

$$2|E| \geq \underset{r}{\beta} (|E| - |V| + 2)$$

skąd wynika żądana nierówność. $\square$

Przykład: Poniżej jest przedstawiony graf *Petersena* (nazwany na cześć duńskiego matematyka, Juliusza Petersena, żyjącego w dziewiętnastym wieku). Pokazać, że graf ten nie jest planarny.



Rozwiązanie: Dla grafu Petersena obwód r wynosi 5 (tzn. najkrótszy cykl ma pięć krawędzi). Ponadto $|E| = 15$ i $|V| = 10$. W ten sposób

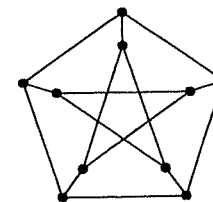
$$45 = (r-2)|E| \not\leq r(|V| - 2) = 40$$

i z poprzedniego wniosku wynika, że graf Petersena nie jest planarny. $\square$

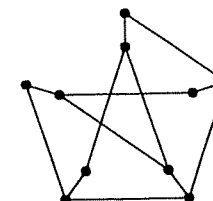
Wiemy już, że K_5 i $K_{3,3}$ nie są grafami planarnymi. W 1930 r. Kazimierz Kuratowski przedstawił nadzwyczajny wynik, stwierdzający, że zasadniczo są to jedyne dwa graf nieplanarne. Dowiódł on, że każdy nieplanarny graf musi, w pewnym sensie, „zawierać” K_5 lub $K_{3,3}$.

Przykład: Widzieliśmy w poprzednim przykładzie, że graf Petersena nie jest planarny: w którym miejscu graf ten zawiera podgraf K_5 lub podgraf $K_{3,3}$?

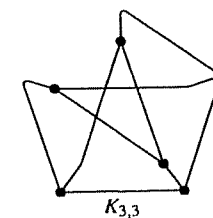
Graf Petersena



Jego pewien podgraf



Zignorowane wierzchołki stopnia 2
(tj. traktowane jako „przypadkowe wierzchołki”
leżące na „większych krawędziach”;
można je po prostu usunąć)

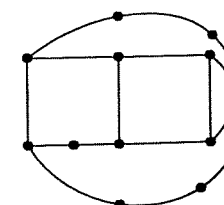
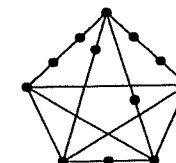
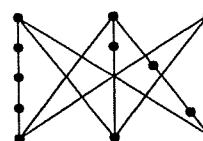


Musimy teraz uczynić pojęcie „ignorowania wierzchołków mających stopień 2” bardziej precyzyjne. Dla zadanej krawędzi $e = uv$ dowolnego grafu *podział krawędzi* e otrzymuje się, wstawiając nowy wierzchołek w i zastępując krawędź uv dwoma krawędziami uw i wv :



Graf, który można otrzymać albo z K_5 , albo z $K_{3,3}$ poprzez kolejne podziały krawędzi będziemy nazywać *K-grafem*. (Takie grafy zwane są również „homeomorficznymi” z K_5 lub $K_{3,3}$.)

Przykład: Wszystkie następujące grafy są *K-grafami*:



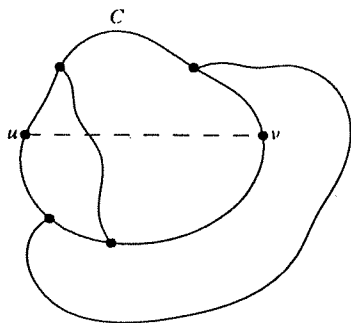
Jest jasne, że podział krawędzi jest tym samym co dodanie na niej przypadkowego wierzchołka i że nie będzie to miało wpływu na planarność. Tak więc żaden z K -grafów nie jest planarny. Sformułujemy teraz godną uwagi odwrotność tego faktu, mianowicie, jeżeli graf nie jest planarny, to musi zawierać jakiś K -graf jako podgraf. Dowód tego klasycznego rezultatu można znaleźć na przykład w książce: J.A. Bondy, U.S.R. Murty *Graph theory with applications*. My natomiast omówimy jedynie jeden z przypadków, który występuje w dowodzie.

Twierdzenie: (Kuratowskiego) Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera jako podgrafu żadnego K -grafu.

Szkic dowodu: Na podstawie uwag poczynionych powyżej pozostaje tylko do udowodnienia, że każdy graf nieplanarny zawiera K -graf. Tak więc dowód polega na pokazaniu, że jeżeli G jest minimalnym grafem nieplanarnym (w tym sensie, że usunięcie którejkolwiek z krawędzi spowoduje, iż stanie się on planarny) oraz jeżeli G nie ma wierzchołków o stopniu 2, to wówczas G jest grafem K_5 lub $K_{3,3}$.

Niech więc G będzie takim nieplanarnym grafem. Niech uv będzie krawędzią grafu G i niech G' będzie grafem, otrzymanym z G przez usunięcie krawędzi uv . Wówczas G' jest planarny i można pokazać, że w G' istnieje cykl, powiedzmy C , który zawiera oba wierzchołki u oraz v . W planarnej reprezentacji grafu G' nie jest możliwe dodanie krawędzi uv bez przecięcia innej krawędzi. W pewnym sensie reprezentacja grafu G' „rozdziela” wierzchołki u oraz v . W dowodach twierdzenia Kuratowskiego zazwyczaj rozważa się, przypadek po przypadku, różne sposoby otrzymania tego rozdzielenia.

Najprostszy przypadek ma miejsce wtedy (i tylko ten będziemy rozważać), kiedy istnieje szlak, przechodzący przez wnętrze C , oraz szlak, idący na zewnątrz tego cyklu w następujący sposób:

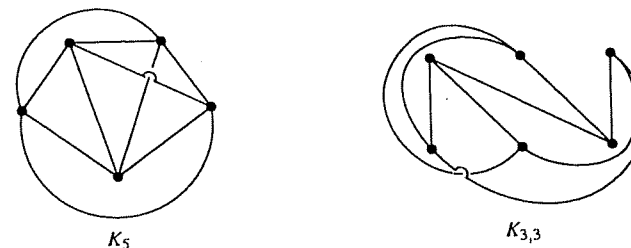


Ale wówczas przedstawiona część grafu G jest już K -grafem, otrzymanym z $K_{3,3}$ przez kolejne podziały (w rzeczywistości fakt, że G jest minimalnym grafem nieplanarnym, w którym nie ma wierzchołków stopnia 2 sprawia, że oba szlaki, wewnętrzny i zewnętrzny, składają się z pojedynczej krawędzi; zatem powyższy rysunek jest całym grafem G).

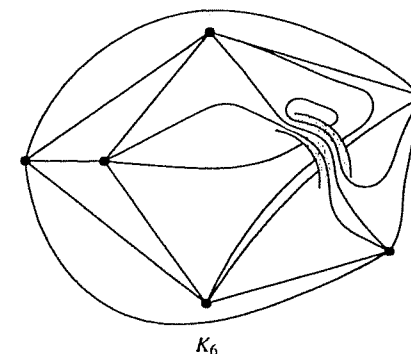
Wszystkie inne przypadki, w których wierzchołek u może być rozdzielony od wierzchołka v doprowadzają, w ostateczności, do K_5 lub $K_{3,3}$. $\square$

Pokazaliśmy już, że K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne lecz, jak podaliśmy w pierwszym przykładzie tego rozdziału, można narysować te grafy tak, by miały tylko jedno przecięcie krawędzi. Zatem, jeżeli rozszerzymy powierzchnię płaszczyzny, dodając mały „most” (topolodzy nazywają go „rączką”), to możemy narysować oba te grafy tak, że żadne dwie krawędzie nie przecinają się.

Przykład: Poniżej, używając jednego mostu, grafy K_5 i $K_{3,3}$ zostały narysowane na płaszczyźnie tak, że żadne dwie krawędzie nie przecinają się:



Jest również prawdą, że wystarczy jeden most aby narysować na płaszczyźnie K_7 i $K_{4,4}$ bez przecinających się krawędzi: przedstawiamy poniżej przypadek grafu K_6 , pozostawiając pozostałe jako zadania.



W ogólnym przypadku, jeżeli jest potrzebne minimum g mostów, aby narysować graf G bez przecinających się krawędzi, to mówimy, że G jest rodzaju g i zapisujemy to następująco $\gamma(G) = g$. W ten sposób grafy planarne są grafami rodzaju zero, a powyższy rysunek pokazuje, że K_6 jest nieplanarnym grafem rodzaju 1.

Można rozważać reprezentację jakiegoś grafu na powierzchni, składającej się z płaszczyzny wraz z dodatkowymi mostami i otrzymać wersję wzoru Eulera

dla grafów rodzaju g . Podamy teraz, bez dowodów, pewne konsekwencje takiego wzoru (odpowiadające naszym wnioskowi w przypadku grafów planarnych).

Twierdzenie: Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, takim że $|V| \geq 3$. Wówczas

$$(i) \quad |E| - 6\gamma(G) \leq 3|V| - 6$$

(ii) jeżeli G jest dwudzielny, to

$$|E| - 4\gamma(G) \leq 3|V| - 4$$

(iii) jeżeli G ma obwód r , to

$$(r-2)|E| - 2r\gamma(G) \leq r(|V| - 2)$$

□

Jeżeli zastosujemy część pierwszą tego twierdzenia do grafu pełnego K_n (z $|V| = n$ oraz $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$), to wnioskujemy, że

$$\gamma(K_n) \geq \frac{1}{12}n(n-1) - \frac{1}{2}n + 1 = \frac{1}{12}(n-3)(n-4)$$

Ponieważ rodzaj grafu jest liczbą całkowitą, wynika stąd, że

$$\gamma(K_n) \geq \left\{ \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \right\}$$

gdzie $\{x\}$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą, większą bądź równą x . Tak więc, na przykład $\gamma(K_7) \geq \{1\} = 1$, a $\gamma(K_8) \geq \{\frac{5}{3}\} = 2$. W rzeczywistości $\gamma(K_7) = 1$, a $\gamma(K_8) = 2$ i, w przypadku dowolnego grafu pełnego, mamy zawsze równość (jak ustala to następne twierdzenie).

Podobnie, część (ii) poprzedniego twierdzenia może być zastosowana do dwudzielnego grafu pełnego $K_{m,n}$,

$$\gamma(K_{m,n}) \geq \left\{ \frac{1}{4}(m-2)(n-2) \right\}$$

i również tym razem w rzeczywistości zachodzi równość.

$$\text{Twierdzenie: (i)} \quad \gamma(K_n) = \left\{ \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \right\}$$

$$(ii) \quad \gamma(K_{m,n}) = \left\{ \frac{1}{4}(m-2)(n-2) \right\}$$

gdzie $\{x\}$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą, większą bądź równą x . □

Rezultat dotyczący rodzaju grafów pełnych został udowodniony dopiero w 1968 r. (przez G. Ringela i J. Youngsa): jest on ściśle związany z problemem kolorowania map, który jest tematem naszego następnego rozdziału.

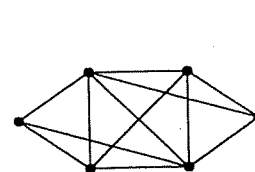
ZADANIA

1. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym. Pokazać, że:

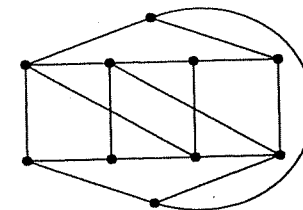
(i) jeżeli G nie zawiera wierzchołków stopnia 0 oraz G ma planarną reprezentację, w której każdy region jest ograniczony trzema krawędziami, to $|E| = 3|V| - 6$;

(ii) Jeżeli G ma planarną reprezentację, w której żaden region nie jest ograniczony trzema lub mniej krawędziami, to $|E| \leq 2|V| - 4$.

2. Które z przedstawionych grafów są planarne? W przypadku grafu planarnego narysować jego prostoliniową planarną reprezentację, a w przypadku grafu nieplanarnego znaleźć K -graf, który jest jego podgrafem.



(i)



(ii)

[W,O]

3. Niech G będzie grafem planarnym, dla którego w pewnej jego planarnej reprezentacji każdy region jest ograniczony cyklem o parzystej liczbie krawędzi. Pokazać, że G jest dwudzielny. [W]

4. Używając jednego mostu narysować na płaszczyźnie grafy K_7 i $K_{4,4}$ bez przecinających się krawędzi (co jest równoważne z ich narysowaniem na powierzchni „torusa”, który przypomina obwarzanek z otworem w środku). [O]

5. Grubość t grafu $G = (V, E)$ jest najmniejszą liczbą grafów planarnych $(V, E_1), \dots, (V, E_t)$ takich, że $E_1 \cup \dots \cup E_t = E$. Pokazać, że dla $|V| \geq 3$ grubość grafu G wynosi co najmniej $\lceil |E| / (3|V| - 6) \rceil$ i wywnioskować, że grubość grafu pełnego K_n wynosi co najmniej $\lceil \frac{1}{6}(n+7) \rceil$.

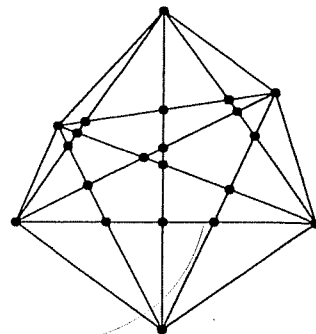
6. Przypomnijmy, że „dopełnieniem” grafu $G = (V, E)$ jest graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, gdzie

$$\bar{E} = \{vw : v, w \in V, v \neq w \text{ i } uv \notin E\}$$

(i) Znaleźć graf G na ośmiu wierzchołkach taki, że zarówno G jak i $\bar{G}$ jest planarny. (W rzeczywistości można wybrać G w ten sposób, że, na dodatek, G i $\bar{G}$ są izomorficzne. [O])

(ii) Udowodnić, że jeżeli $|V| \geq 11$, to G i $\bar{G}$ nie mogą być grafami planarnymi. (W rzeczywistości wynik ten jest prawdziwy dla $|V| \geq 9$, lecz jest go o wiele trudniej udowodnić. [W])

7. Rozważmy wielobok o n bokach wraz ze wszystkimi przekątnymi (tak jak pokazano w przypadku $n = 6$). Załóżmy, że przez każdy punkt przecięcia przechodzą co najwyżej dwie spośród tych przekątnych. Traktując każdy punkt przecięcia jako wierzchołek grafu, otrzymujemy rysunek grafu planarnego (tak jak pokazano). Stosując wzór Eulera, wyznaczyć liczbę regionów, na które został podzielony ten wielokąt. (Jest to alternatywne podejście do zadania 12 z rozdziału 1).



[W,O]

8. Niech G będzie grafem planarnym, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3.
- (i) Pokazać, że jeżeli G ma planarną reprezentację, w której każdy region jest ograniczony czterema lub sześcioma krawędziami, to istnieje dokładnie sześć regionów ograniczonych czterema krawędziami. [W]
- (ii) Pokazać, że jeżeli G ma planarną reprezentację, w której każdy region jest ograniczony pięcioma lub sześcioma krawędziami, to istnieje dokładnie dwanaście regionów ograniczonych pięcioma krawędziami.
- W każdym z przypadków podać dwa przykłady takich grafów, które mają różną liczbę wierzchołków. [O]
9. Niech G będzie planarnym grafem dwudzielnym, w którym każdy wierzchołek ma stopień d . Pokazać, że $d < 4$.
Czy istnieje taki graf dla $d = 3$? [O]
10. Niech G będzie grafem planarnym na co najmniej trzech wierzchołkach i, dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n , niech v_n będzie liczbą wierzchołków stopnia n . Pokazać, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} (6 - n) v_n \geq 12 \quad [W]$$

Wynioskować, że G ma co najmniej trzy wierzchołki stopnia 5 lub mniej. [W]

11. Stosując zadanie 10, udowodnić przez indukcję, że wierzchołki grafu planarnego można pokolorować sześcioma kolorami. [W]
12. Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem planarnym, w którym każdy wierzchołek ma dodatni stopień d i dla którego, w pewnej planarnej reprezentacji,

każdy region jest ograniczony c krawędziami. Pokazać, że

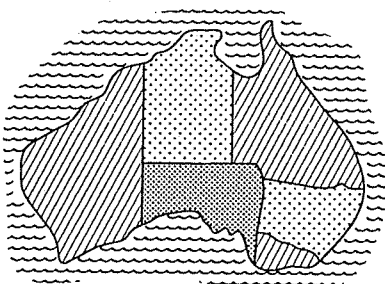
$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} > \frac{1}{2} \quad [W]$$

Wypisać wszystkie pary liczb całkowitych $c, d (\geq 3)$, które spełniają tę nierówność i w każdym przypadku wyznaczyć opisany wyżej graf G . [O]

13. Gra, zwana po angielsku „*sprouts*” jest grą między dwoma osobami. Na płaszczyźnie jest oznaczona dowolna liczba wierzchołków. Każdy z graczy, na przemian, dodaje nowy wierzchołek i łączy go krawędziami z dwoma istniejącymi wierzchołkami. Jedynymi warunkami są te, że otrzymywany rysunek musi być planarną reprezentacją jakiegoś grafu i że żaden wierzchołek nie ma stopnia większego od 3. Przegrywa ten gracz, który pierwszy nie może wykonać swojego ruchu. Pokazać, że niezależnie od liczby początkowych wierzchołków, gra zawsze musi mieć swój koniec. [W]

Rozdział ten dotyczy kolorowania obszarów mapy w taki sposób, że żadne dwa przyległe obszary nie mają tego samego koloru.

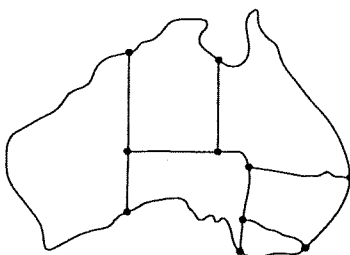
Przykład:



Mamy przed sobą mapę Australii. Każdy jej fragment (także otaczające morze) został tak „pokolorowany”, że żadne dwa przyległe obszary nie mają tego samego koloru. Użyliśmy do tego czterech „kolorów” i dla tej konkretnej mapy jest to ich najmniejsza możliwa liczba. □

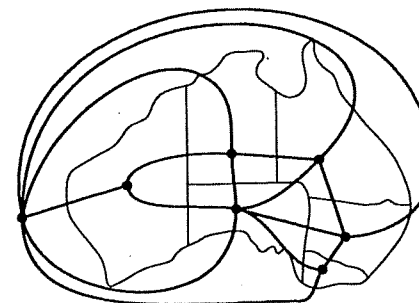
W jaki sposób kolorowanie mapy może być traktowane matematycznie jako część teorii grafów? Następny przykład pokazuje dwie takie możliwości.

Przykład: Poprzednia mapa Australii może być traktowana jak planarna reprezentacja grafu:



Kolorowanie mapy jest wówczas po prostu kolorowaniem regionów planarnej reprezentacji w taki sposób, że żadne dwa regiony, mające wspólną graniczną krawędź, nie mają tego samego koloru.

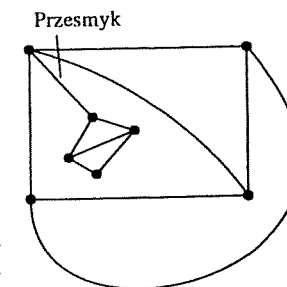
Alternatywnie możemy użyć innego grafu, by wskazać, które obszary są przyległe. W przykładzie „australijskim” będzie siedem wierzchołków, reprezentujących siedem obszarów, a dwa wierzchołki będą połączone krawędzią, jeżeli odpowiadające im obszary mają jedną lub więcej wspólnych granic. Powstały graf będzie rzeczywiście planarny, ponieważ jego planarna reprezentacja może być nałożona na tę mapę, tak jak to pokazano:



Kolorowanie zadanej mapy jest teraz równoznaczne z kolorowaniem wierzchołków tej nowej graficznej reprezentacji. □

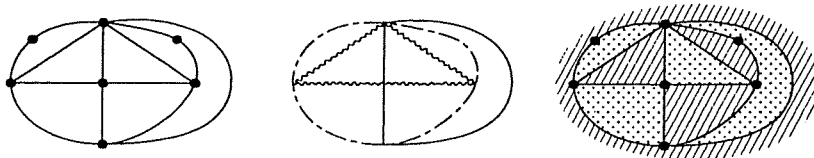
Powyższy przykład pokazuje, że kolorowanie mapy może być traktowane jako kolorowanie regionów planarnej reprezentacji grafu lub jako kolorowanie wierzchołków pewnego nowego grafu planarnego. Dla większości naszych rozważań będziemy się zajmowali kolorowaniem regionów, a do postaci wierzchołkowej powrócimy w ostatniej części tego rozdziału.

Badając kolorowania regionów planarnych reprezentacji grafu, ograniczymy naszą uwagę do grafów, które faktycznie mogą powstać z używanych w praktyce map. Po pierwsze będziemy zakładać, że grafy są spójne (gdyż w przeciwnym razie kolorowanie różnych składowych byłoby kolorowaniem oddzielnych wysp). Po drugie będziemy zakładać, że graf nie zawiera przesmyku, tzn. krawędzi, której usunięcie rozspójnia graf. Czynimy to dlatego, że w dowolnej planarnej reprezentacji grafu zawierającego przesmyk, krawędź ta będzie miała ten sam region po obu swoich stronach, a w praktyce nigdy nie napotkamy takich granic. Tak więc zdefiniujemy teraz *mapę* jako planarną reprezentację spójnego planarnego grafu z co najmniej jedną krawędzią, z których żadna nie jest przesmykiem. Wówczas każda krawędź jest częścią granicy dwóch różnych regionów.



W ten sposób *kolorowanie mapy* wykonujemy przez przypisanie koloru każdemu regionowi mapy tak, by żadne dwa regiony mające wspólną graniczną krawędź nie miały tego samego koloru. Stawiamy teraz następujące pytanie: ilu kolorów potrzebujemy, aby móc pokolorować każdą mapę? W powyższym „australijskim” przykładzie wykorzystaliśmy cztery kolory i, jak czytelnik niewątpliwie wie, cztery kolory zawsze wystarczą. Zanim przystąpimy do omawiania niezmieranie trudnego „twierdzenia o czterech kolorach”, przyjrzymy się pewnym słabszym результатам dotyczącym kolorowania map. Pierwszy z nich charakteryzuje te mapy, które mogą być pokolorowane dokładnie dwoma kolorami.

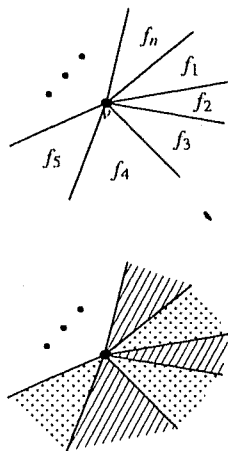
Przykład: Na rysunku z lewej strony jest przedstawiona mapa, której każdy wierzchołek (grafu związanego z tą mapą) jest stopnia parzystego. Tak więc krawędzie tworzą sumę rozłącznych cykli, jak to pokazano na środkowym rysunku. Używając pierwszego koloru dla regionów leżących wewnątrz nieparzystej liczby spośród tych cykli i drugiego koloru dla regionów leżących wewnątrz parzystej liczby spośród tych cykli, otrzymujemy kolorowanie mapy przedstawione po stronie prawej.



□

Twierdzenie: Mapę można pokolorować dwoma kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek jest stopnia parzystego.

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy najpierw, że mapa (wraz ze związanym z nią grafem G) została pokolorowana dwoma kolorami. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem w G i niech n będzie stopniem wierzchołka v . Oznaczmy w pokolorowanej mapie regiony spotykające się w v jako $f_1, f_2, \dots, f_n$, zgodnie ze wskazówkami zegara, dookoła v , tak jak to pokazano. W rzeczywistości te regiony nie muszą być wszystkie różne; jest możliwe na przykład, że regiony f_1 i f_3 są tymi samymi regionami. Jednakże niewystępowanie przesmyków oznacza, że f_1 jest innym regionem niż f_2 , f_2 innym niż f_3 , $\dots$ i f_n innym niż f_1 . W ten sposób dwa kolory mapy występują wokół v na przemian, tak jak pokazano, a stąd wynika, że n jest parzyste. W konsekwencji każdy wierzchołek grafu G ma stopień parzysty.

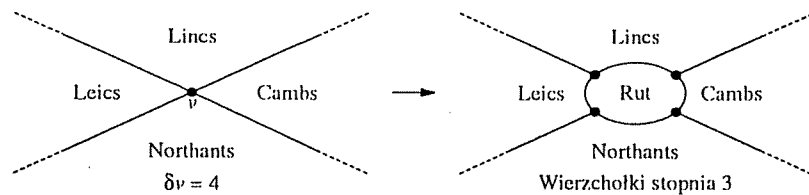


($\Leftarrow$) Na odwrót, załóżmy, że każdy wierzchołek grafu G związanego z daną mapą ma stopień parzysty. Wówczas G jest grafem eulerskim i, na mocy twierdzenia ze strony 85, zawiera pewne cykle $C_1, \dots, C_r$, które wykorzystują każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz. Spójrzmy teraz na rozłożenie tych cykli na mapie: każdy ma „wnętrze” i dla każdego regionu mapy możemy wyznaczyć liczbę cykli, wewnątrz których leży ten region. Jeżeli region leży wewnątrz nieparzystej liczby spośród cykli $C_1, \dots, C_r$, to dla tego regionu użyjmy koloru pierwszego, a jeżeli leży on wewnątrz parzystej liczby cykli, to użyjmy dla niego koloru drugiego (tak jak w poprzednim przykładzie).

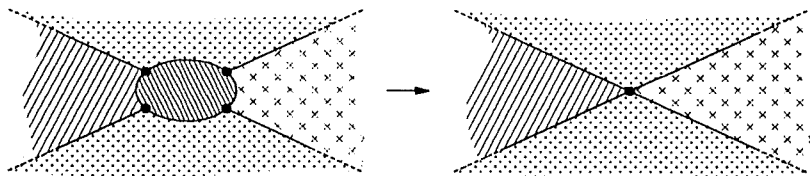
Ta metoda umożliwia kolorowanie każdego regionu jednym spośród dwóch kolorów. Ale czy otrzymujemy w ten sposób właściwe kolorowanie mapy? To znaczy, czy każda krawędź tworzy część granicy dwóch regionów o różnych kolorach? Niech e będzie dowolną krawędzią grafu G . Wówczas e należy do dokładnie jednego spośród cykli $C_1, \dots, C_r$; załóżmy, że leży ona w C_i . Załóżmy także, że region z jednej strony krawędzi e ma, powiedzmy, kolor pierwszy. Wówczas region ten leży wewnątrz nieparzystej liczby cykli spośród $C_1, \dots, C_r$. Przekroczycie krawędzi e w celu dotarcia do regionu leżącego po jej drugiej stronie oznacza przecięcie jednego cyklu, w tym przypadku C_i . Łatwo więc można zauważyć, że region po drugiej stronie krawędzi e leży wewnątrz parzystej liczby cykli spośród $C_1, \dots, C_r$, będzie on więc miał drugi kolor. W ten sposób pokolorowaliśmy mapę dwoma kolorami, co było do udowodnienia. □

Czy istnieje mapa geograficzna, pokolorowana prawidłowo przy użyciu tylko dwóch kolorów? Jest to mało prawdopodobne ponieważ, jak mówi powyższe twierdzenie, każdy wierzchołek musiałby mieć stopień parzysty. Mapy geograficzne nie dają, rzecz jasna, wierzchołków stopnia drugiego, a wierzchołek o stopniu 4 lub więcej oznaczałby, że co najmniej cztery obszary stykają się w jednym punkcie: czy jest takie miejsce, gdzie tak się dzieje? Oczywiście żadne z czterech hrabstw Wielkiej Brytanii nie stykają się w jednym punkcie (choćby hrabstwa Cambridgeshire, Leicestershire, Lincolnshire i Northamptonshire dochodzą bardzo blisko do jednego punktu w okolicy Stamford). Aby zaznaczyć rzadki przypadek czterech obszarów stykających się w jednym punkcie, skrzyżowanie czterech amerykańskich stanów: Arizona, Utah, Kolorado i Nowy Meksyk, trafnie nazwano Four Corners (Cztery Narożniki). W rzeczywistości ogromna większość wierzchołków na mapach geograficznych ma stopień 3. Z tego powodu skupimy naszą uwagę na mapach *sześciennych*, tzn. mających każdy wierzchołek stopnia 3. Istnieją również matematyczne przesłanki, uzasadniające ograniczenie się do rozważania map sześciennych.

Przykład: Załóżmy na razie, że hrabstwa Cambridgeshire, Leicestershire, Lincolnshire i Northamptonshire stykają się w jednym punkcie v . Załóżmy również, że znamy już metodę kolorowania wszystkich sześciennych map czterema kolorami, a teraz należy pokolorować tą metodą mapę brytyjskich hrabstw. Można utworzyć następującą mapę (powstanie wtedy obszar oznaczony na rysunku Rut):



Powtarzając ten proces przy wszystkich wierzchołkach stopnia większego niż 3, otrzymalibyśmy nieco bardziej skomplikowaną sześcienną mapę. Można wówczas pokolorować nową sześcienną mapę czterema kolorami, a następnie usunąć nowo utworzone hrabstwa (obszary), otrzymując kolorowanie wyjściowej mapy czterema kolorami:



□

W ten sposób, zarówno pod względem geograficznym, jak i matematycznym, jest uzasadnione ograniczenie uwagi do map sześciennych. Zanim przejdziemy do twierdzeń dotyczących kolorowania takich map, zauważmy, jako prosty wniosek ze wzoru Eulera, że w każdej sześcienną mapie będzie zawsze co najmniej jeden region ograniczony pięcioma lub mniej krawędziami. W przeciwnym bowiem razie każdy region byłby ograniczony co najmniej sześcioma krawędziami i w rezultacie (zliczając graniczne krawędzie) otrzymalibyśmy nierówność:

$$2|E| \leq 6(|E| - |V| + 2)$$

z której wynikałoby, że $2|E| > 3|V|$. To zaś przeczyłoby faktowi, że każdy wierzchołek jest stopnia 3. Zatem każda sześcienna mapa rzeczywiście zawiera region ograniczony co najwyżej pięcioma krawędziami i możemy skorzystać z tego faktu w dowodach kolejnych twierdzeń o kolorowaniu. Następne twierdzenie odpowiada na pytanie, kiedy trzy kolory wystarczają do kolorowania map sześciennych.

Twierdzenie: Mapa sześcienna może być pokolorowana trzema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej graf jest dwudzielny.

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy najpierw, że mapa sześcienna (z odpowiadającym jej grafem G) została pokolorowana trzema kolorami. Pokażemy, że każdy cykl w G składa się z parzystej liczby krawędzi i, na mocy twierdzenia ze strony 53, udowodnimy, że G jest dwudzielny.

Zanim rozważymy dowolny cykl grafu G , niech C_i będzie cyklem, który tworzy granicę regionu f_i na naszej mapie. Wówczas, ponieważ każdy wierzchołek ma stopień 3, mamy sytuację taką, jak pokazano po prawej stronie: jeden z kolorów będzie użyty dla f_i , a pozostałe dwa będą musiały występować na przemian wokół f_i . Wynika stąd, że C_i ma parzystą liczbę krawędzi.

Niech teraz C będzie dowolnym cyklem grafu G i założmy, że na mapie wewnątrz C leżą regiony $f_1, \dots, f_n$. Wynika stąd (tak jak w zadaniu 3 poprzedniego rozdziału), że cykl C składa się z parzystej liczby krawędzi. Rzeczywiście, jeżeli każdy region f_i jest ograniczony przez cykl C_i , tak jak pokazano, i jest dokładnie m krawędzi wewnątrz C , to proste zliczenie, korzystające z zasady włączania/wyłączania daje

$$|C| = \underbrace{|C_1| + \dots + |C_n|}_{\text{każdy jest parzysty}} - 2m = \text{liczba parzysta}$$

Zatem każdy cykl grafu G jest parzystej długości a więc G jest dwudzielny.

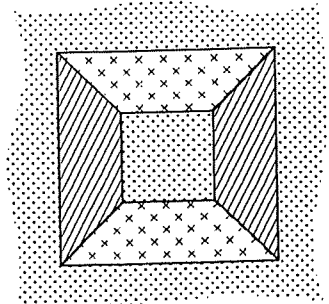
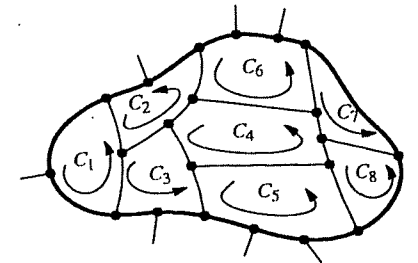
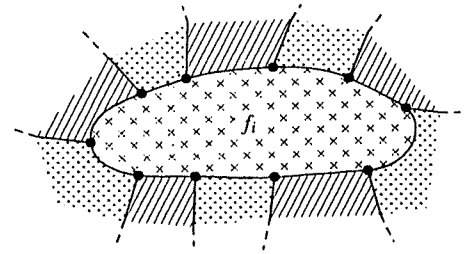
($\Leftarrow$) Na odwrót założmy, że mamy daną mapę sześcienną, której graf $G = (V, E)$ jest dwudzielny. Ponieważ G jest planarnym grafem dwudzielny, to na mocy trzeciego wniosku ze strony 175, otrzymujemy, że $|E| \leq 2|V| - 4$. Tak więc mając na uwadze fakt, że każdy wierzchołek ma stopień 3, dostajemy

$$3|V| = 2|E| \leq 4|V| - 8$$

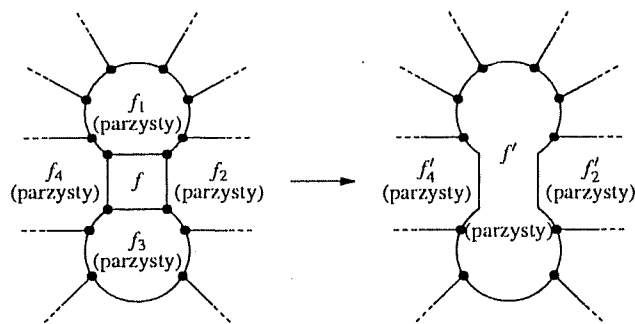
i wynika stąd, że $|V| \geq 8$ oraz $|E| \geq 12$.

W rzeczywistości można sprawdzić, że wszystkie sześcienną, dwudzielne mapy z $|E| = 12$ są „identyczne” z mapą przedstawioną po prawej stronie, i że mogą być pokolorowane trzema kolorami, tak jak pokazano.

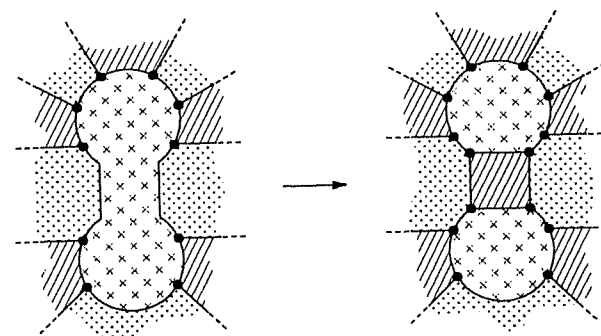
Dowód tej części przeprowadzimy teraz przez indukcję względem $|E|$. Najmniejszym osiągalnym przypadkiem jest $|E| = 12$ i właśnie widzieliśmy, że dla



takich map wystarczy trzy kolory. Załóżmy więc, że $|E| > 12$ i że rezultat zachodzi dla grafów o mniejszej liczbie krawędzi. Mając na uwadze komentarze poprzedzające to twierdzenie, wiemy, że mapa sześcienna zawiera region ograniczony trzema, czterema lub pięcioma krawędziami. Jednakże dwudzielność grafu oznacza, że żaden region nie jest ograniczony nieparzystą liczbą krawędzi, a więc w tym przypadku mapa ma region f ograniczony dokładnie czterema krawędziami. Przedstawiamy jeden z takich regionów na rysunku po prawej stronie, gdzie oznaczyliśmy cztery przyległe regiony f_1, f_2, f_3 i f_4 zgodnie ze wskazówkami zegara, dookoła f . Jest całkiem możliwe, że f_1 i f_3 są w rzeczywistości częścią tego samego regionu, i jest również możliwe, że f_2 i f_4 są częścią tego samego regionu. Jest jednak niemożliwe, aby obie te sytuacje zachodziły jednocześnie, gdyż to spowodowałoby, że region f_1/f_3 przeciąłby w pewnym punkcie region f_2/f_4 . Załóżmy więc, nie tracąc na ogólności, że f_1 i f_3 są różnymi regionami, tak jak pokazano poniżej. Wówczas zmodyfikujemy f oraz jego granicę, tak jak pokazano, pozostawiając pozostałą część mapy nienaruszoną:



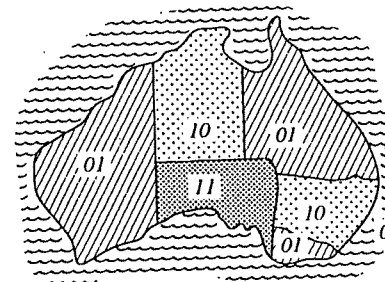
Po krótkiej chwili zastanowienia dojdziemy do wniosku, że nowy rysunek jest w dalszym ciągu sześcienną mapą, której graf jest dwudzielny: fakt, że każdy wierzchołek ma w dalszym ciągu stopień 3, jest bezpośredni, a fakt, że każdy region jest w dalszym ciągu ograniczony parzystą liczbą krawędzi, jest łatwy do sprawdzenia. Ponadto nowa mapa ma mniej krawędzi, a więc możemy zastosować założenie indukcyjne, wykazując, że może być pokolorowana trzema kolorami. Poniżej pokazujemy jedno takie kolorowanie: zauważmy, że pierwszy kolor jest użyty dla f' , a pozostałe dwa kolory muszą być rozłożone na przemian dookoła f' . Prosty test dwoistości wokół krawędzi regionu f' pokazuje, że w każdym takim kolorowaniu regiony f'_2 oraz f'_4 będą miały ten sam kolor. Wówczas łatwo jest przywrócić wyjściową postać mapy i dostosować do niej to kolorowanie bez użycia dodatkowych kolorów:



Pokazaliśmy więc, że zadana mapa może być pokolorowana trzema kolorami, co kończy dowód przez indukcję. $\square$

Rozważywszy przypadki dwóch i trzech kolorów przechodzimy teraz do czterech kolorów. Krótka chwila zastanowienia nasunie myśl, że poprzednie twierdzenie może być przeformułowane następująco: mapa sześcienna da się pokolorować trzema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki odpowiadającego jej grafu mogą być pokolorowane dwoma kolorami. Następnym rezultatem zgrabnie łączy kolorowanie sześciennych map czterema kolorami z kolorowaniem krawędzi grafu trzema kolorami.

Przykład: Przypomnijmy wcześniejszy przykład pokolorowania mapy Australii czterema kolorami i nadajmy kolorom nazwy „00”, „01”, „10” i „11”, tak jak pokazano:



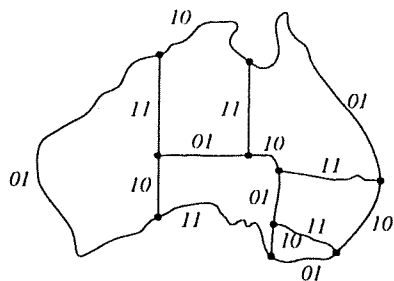
Ponieważ każda krawędź rozgranicza dwa regiony o różnych kolorach, możemy zatem użyć tych kolorów do wyznaczenia koloru tej krawędzi. Na przykład

10 po jednej stronie i 01 po drugiej $\Rightarrow$ użyć 11 dla krawędzi.

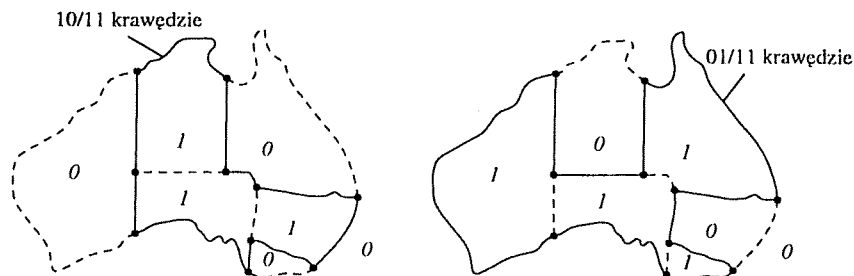
Podobnie

10/11 $\Rightarrow$ 01, 10/00 $\Rightarrow$ 10, 01/11 $\Rightarrow$ 10, 01/00 $\Rightarrow$ 01, 11/00 $\Rightarrow$ 11

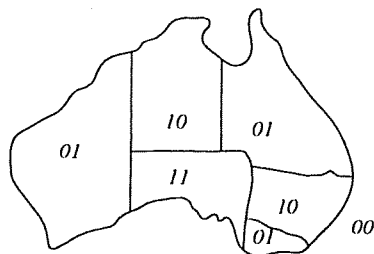
To daje w rezultacie następujące kolorowanie krawędzi grafu trzema kolorami:



Założmy teraz, że przedstawiono nam powyższe pokolorowanie krawędzi: istnieje elegancka metoda wyznaczająca z niego pokolorowanie mapy czterema kolorami. Na rysunku przedstawionym poniżej z lewej strony, oznaczyliśmy przez „1” te regiony, które leżą wewnątrz cyklu utworzonego przez krawędzie dwóch kolorów 10 i 11, pozostałe regiony są oznaczone przez „0”. Na rysunku po prawej stronie oznaczyliśmy przez „1” te regiony, które leżą wewnątrz cyklu, utworzonego przez krawędzie dwóch kolorów 01 i 11, oznaczając pozostałe przez „0”:



Te dwa rysunki nadają każdemu regionowi dwa „wyniki”: na przykład Australia Zachodnia „zdobyła” 0 na lewym rysunku a 1 na prawym rysunku, możemy więc użyć dla niej koloru 01. Takie postępowanie nie tylko da nam możliwość pokolorowania mapy czterema kolorami 00, 01, 10 i 11, ale również doprowadzi nas w tym przypadku do tego samego kolorowania, od którego rozpoczęliśmy ten przykład:



□

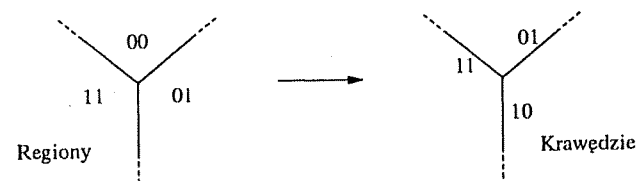
Twierdzenie: Mapa sześcienna może być pokolorowana czterema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie odpowiadającego jej grafu mogą być pokolorowane trzema kolorami.

Dowód: ($\Rightarrow$) Założmy najpierw, że sześcienna mapa (wraz z odpowiadającym jej grafem G) została pokolorowana czterema kolorami. Przypiszmy tym czterem kolorom nazwy „00”, „01”, „10” i „11”. Tak jak w poprzednim przykładzie wykonujemy kolorowanie krawędzi grafu G dokładnie trzema spośród tych kolorów. Aby wyznaczyć kolor, który należy użyć dla krawędzi, weźmy pod uwagę kolory po każdej jej stronie i przyjmijmy następujące zasady:

10 po jednej stronie i 01 po drugiej $\Rightarrow$ użyć 11 dla krawędzi

10/11 $\Rightarrow$ 01, 10/00 $\Rightarrow$ 10, 01/11 $\Rightarrow$ 10, 01/00 $\Rightarrow$ 01, 11/00 $\Rightarrow$ 11

W ten sposób kolorujemy każdą krawędź jednym z trzech kolorów 01, 10 oraz 11, ale czy jest to poprawne kolorowanie; tj. czy w każdym wierzchołku wszystkie trzy spotykające się krawędzie mają różne kolory? Założmy na przykład, że regiony o kolorach 00, 01 i 11 stykają się w jakimś wierzchołku: wówczas trzy krawędzie dochodzące do tego wierzchołka, będą miały kolory 01, 10 oraz 11, tak jak pokazano:



Przypadki pozostałych kombinacji trzech kolorów regionów stykających się w wierzchołku mogą być sprawdzone w podobny sposób. Zatem taka konstrukcja rzeczywiście daje kolorowanie krawędzi grafu trzema kolorami.

($\Leftarrow$) Na odwrót założmy, że mamy zadane pokolorowanie krawędzi grafu trzema kolorami 01, 10 i 11. Wówczas każdy kolor występuje przy każdym wierzchołku, a więc w podgrafie otrzymanym przez usunięcie krawędzi koloru 01, każdy wierzchołek ma stopień 2. W ten sposób każda składowa tego podgrafu jest, po prostu, cyklem (i chociaż są one rozłączne, to jest całkiem możliwe, że na mapie jeden z tych cykli będzie wewnątrz innego). Zatem na mapie każdy region będzie wewnątrz albo parzystej liczby cykli (uzyskując „wynik” 0), albo nieparzystej liczby (uzyskując „wynik” 1). Podobnie, jeżeli zamiast poprzednich usuniemy krawędzie koloru 10, to każdy region będzie wewnątrz albo parzystej liczby pozostałych cykli (uzyskując drugi wynik 0), albo nieparzystej liczby (uzyskując drugi wynik 1). W konsekwencji takie postępowanie nadaje każdemu regionowi jeden spośród podwójnych wyników 00, 01, 10 lub 11 i, traktując je jako kolory, daje to możliwość pokolorowania mapy czterema kolorami. Rzeczywiście, postępując w ten sposób kolorujemy każdy z regionów i musimy jedynie sprawdzić, czy dla każdej krawędzi e dwa regiony leżące po obu jej stronach mają różne kolory.

Załóżmy, dla przykładu, że e ma kolor 10, a region f , leżący z jednej jej strony, ma kolor 11. Wówczas w powyższym postępowaniu region f ma pierwszy wynik równy 1, tzn. leży wewnątrz nieparzystej liczby cykli, których krawędzie mają kolory 10 i 11. Ale wtedy przejście przez krawędź e (o kolorze 10) zmieni liczbę cykli o 1 i doprowadzi do regionu f' , leżącego wewnątrz parzystej liczby cykli, tj. mającego pierwszy wynik równy 0. Drugi wynik jest w tym przypadku nie zmieniony, a więc kolor regionu f' jest 01. W ten sposób te dwa regiony leżące po obu stronach krawędzi e mają rzeczywiście różne kolory. W ogólnym przypadku dwa regiony przyległe do krawędzi o kolorze 10 mają różne pierwsze wyniki, dwa regiony przyległe do krawędzi o kolorze 01 mają różne drugie wyniki, a dwa regiony przyległe do krawędzi o kolorze 11 mają różne zarówno pierwsze, jak i drugie wyniki.

Zatem we wszystkich przypadkach dowolna krawędź rozgranicza dwa regiony o różnych kolorach: rzeczywiście więc za pomocą czterech kolorów można pokolorować właściwie mapę, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Chociaż jest to zachwycający rezultat, pokazuje on jedynie równoważność dwóch niebanalnych własności. Pierwsza z nich stwierdza, że każdą sześcienną mapę (a zatem i każdą mapę) można pokolorować czterema kolorami: jest to słynne „twierdzenie o czterech kolorach”. Jeżeli chodzi o drugą własność, to odwołajmy się do naszej dyskusji w rozdziale 7 dotyczącej twierdzenia Vizinga: jeżeli graf ma największy stopień wierzchołka d , to jego krawędzie można pokolorować $d + 1$ kolorami. Dla niektórych jednak grafów wystarczy d kolorów i, w ogólnym przypadku, wyznaczenie prostych klasyfikacji takich grafów jest niebanalnym problemem. Druga własność w poprzednim twierdzeniu mówi, że wszystkie planarne grafy sześciennne mają tę własność.

Twierdzenie o czterech kolorach ma długą i interesującą historię, której najwcześniejszy okres jest opisany w najczęściej przytaczanej książce *Graph theory 1736–1936*. Jej autorzy cytują list De Morgana z 1852 r., jako najwcześniejszą spisana wzmiankę o problemie, i omawiają jego rozwój łącznie ze słynnym fałszywym „dowodem” A.B. Kempe’a z 1879 r. i z wykazaniem jego fałszywości, dokonany przez P.J. Heawooda w 1890 r. Problem ten zainicjował wiele kierunków badań w teorii grafów, do niektórych z nich powrócimy za chwilę. Lecz samo twierdzenie o czterech kolorach zostało udowodnione dopiero w 1976 r., kiedy to dwaj amerykańscy matematycy, K. Appel i W. Haken, wykorzystując pewne idee Kempe’a, przedstawili dowód „wspomagany” przez komputer: więcej szczegółów o ich metodzie można znaleźć w książce *Selected topics in graph theory*, cytowanej w spisie literatury. Appel oszacował, że ich dowód zająłby około 300 godzin pracy komputera i chociaż nowa generacja komputerów skróciłaby ten czas w sposób znaczący, to jest jasne, zapewne, dlaczego nie ma miejsca na dowód tego twierdzenia we wstępnym kursie! (Udowodnimy jednak za chwilę, rezultat dla pięciu kolorów.)

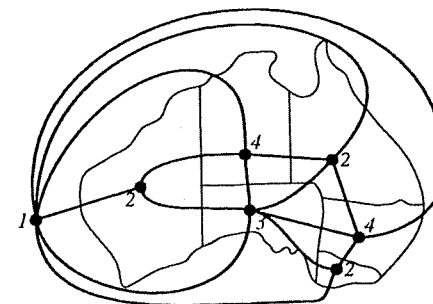
Twierdzenie: (Twierdzenie o czterech kolorach) Każda mapa może być pokolorowana czterema kolorami. $\square$

Do wielu kierunków badań zainicjowanych kolorowaniem map należą m. in. badania dotyczące kolorowania krawędzi (jak wynik udowodniony wcześniej), badania „map” na innych powierzchniach czy też badania „dualności” map, gdzie regiony zastępowane są wierzchołkami (jak wspomniano na początku tego rozdziału). W przypadku „map” na innych powierzchniach „twierdzenie Heawooda o kolorowaniu map” mówi, że na powierzchni otrzymanej z płaszczyzny przez dodanie h mostów, każda mapa może być pokolorowana $\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48h}) \rfloor$ kolorami. Dla $h > 0$ ostatnia część tego dowodu została przedstawiona w 1968 r., gdy (jak już wspomnieliśmy w poprzednim rozdziale) G. Ringel i J.W. Youngs ostatecznie pokazali, że graf pełny K_n jest rodzaju $\lfloor \frac{1}{2}(n-3)(n-4) \rfloor$: dla $h = 0$ wynik ten jest po prostu innym przedstawieniem twierdzenia o czterech kolorach.

W naszych dowodach twierdzeń o kolorowaniu map przyjęliśmy naiwne podejście, rozpatrując kolorowanie regionów mapy. W ostatnim twierdzeniu tego rozdziału pokażemy, że wszystkie mapy można pokolorować pięcioma kolorami. Moglibyśmy udowodnić to podobnymi technikami. Zastosowalibyśmy indukcję względem liczby krawędzi, rozważając następnie region ograniczony trzema, czterema lub pięcioma krawędziami, i w każdym z tych przypadków zredukowalibyśmy mapę do mniejszej (jak to uczyniliśmy w dowodzie na stronie 189). Jednak dowód staje się trochę mniej zagniatwany, jeżeli przyjmiemy „wierzchołkowe” sformułowanie tego problemu: to również umożliwia nam pokazanie ważnej ogólnej techniki dowodu.

Mając zadaną mapę, możemy zdefiniować nowy graf planarny na zbiorze wierzchołków równym zbiorowi regionów mapy, przy czym dwa wierzchołki połączone są krawędzią, jeżeli dwa odpowiadające im regiony mają jedną lub więcej wspólnych granic. (Gdybyśmy chcieli omówić ten temat bardziej szczegółowo, wprowadzilibyśmy grafy, w których między parą wierzchołków są dozwolone wielokrotne krawędzie, przyjęlibyśmy, że każda krawędź mapy powoduje powstanie krawędzi w nowym grafie i w ten sposób doprowadziłoby to do badania grafów „dualnych”).

Przykład: Powróćmy do wcześniejszego „australijskiego” przykładu i zauważmy, że kolorowanie mapy Australii jest równoważne z kolorowaniem wierzchołków tego nowego grafu planarnego:



W ten sposób, nie zagłębiając się w szczegóły, fakt, że każda mapa może być pokolorowana pięcioma kolorami, jest równoznaczny ze stwierdzeniem, że wierzchołki każdego planarnego grafu można pokolorować pięcioma kolorami. Zakończymy ten rozdział dowodem tego twierdzenia.

Twierdzenie: Każda mapa może być pokolorowana pięcioma kolorami.

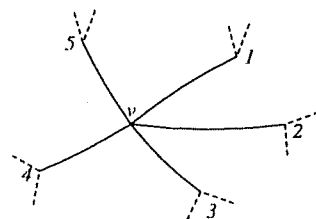
Dowód: Jak wspomnieliśmy powyżej, udowodnimy równoważny wynik, że wierzchołki każdego grafu planarnego $G = (V, E)$ można pokolorować pięcioma kolorami: uczynimy to przez indukcję względem $|V|$. Przypadki $|V| \leq 5$ są banalne. Załóżmy więc, że $|V| > 5$, że mamy planarną reprezentację grafu G i że grafy planarne o mniejszej liczbie wierzchołków mogą być pokolorowane pięcioma kolorami.

Na mocy drugiego wniosku ze wzoru Eulera (strona 175), planarność grafu G zapewnia, że $|E| \leq 3|V| - 6$, a stąd, że

$$\sum_{v \in V} \delta v = 2|E| \leq 6|V| - 12 < 6|V|$$

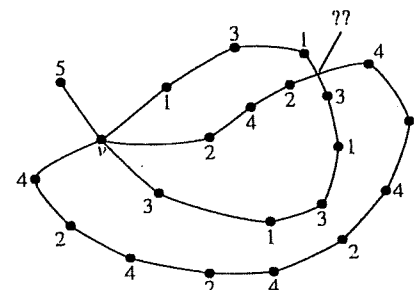
To implikuje, że nie każdy wierzchołek grafu G może mieć stopień 6 lub więcej: niech więc v będzie wierzchołkiem o stopniu co najwyżej 5. Wówczas niech G' będzie grafem otrzymanym z G przez usunięcie wierzchołka v (wraz z krawędziami do niego dochodzącymi). Na mocy założenia indukcyjnego możemy pokolorować wierzchołki grafu G' pięcioma kolorami. Rozważmy jedno z takich kolorowań i spójrzmy na kolory (wszystkich wierzchołków oprócz v) w planarnej reprezentacji grafu G .

Jeżeli istnieje jeden z pięciu kolorów, który nie jest użyty w wierzchołku połączonym z v , to, oczywiście, ten kolor może być użyty dla v , dając kolorowanie wszystkich wierzchołków grafu G pięcioma kolorami, tak jak żądaliśmy. Załóżmy teraz, że v jest wierzchołkiem końcowym dokładnie pięciu krawędzi vv_1, vv_2, vv_3, vv_4 oraz vv_5 , występujących dookoła v zgodnie ze wskazówkami zegara, z kolorem 1 dla v_1 , kolorem 2 dla v_2 itd., tak jak zostało to pokazane.



Dla wszystkich i oraz j takich, że $1 \leq i < j \leq 5$, niech G_{ij} będzie podgrafem grafu G' składającym się z wierzchołków koloru i oraz koloru j oraz wszystkich krawędzi łączących takie wierzchołki. Jeżeli v_1 i v_3 należą do różnych składowych grafu G_{13} , to możemy zamienić ich kolory w tej składowej grafu G_{13} , która zawiera v_1 ; tj. w składowej tej przekolorujemy na kolor 3 wszystkie wierzchołki, które pierwotnie miały kolor 1, i na odwrót. Po chwili namysłu dojdziemy do wniosku, że w dalszym ciągu mamy kolorowanie wierzchołków grafu G' tymi samymi pięcioma kolorami, lecz teraz kolor 1 nie jest użyty w żadnym wierzchołku połączonym z v . W ten sposób możemy pokolorować wierzchołek v tym kolorem, otrzymując żądane pokolorowanie wierzchołków grafu G .

Podobne rozumowanie może być zastosowane w przypadku, gdy v_2 oraz v_4 znajdują się w różnych składowych grafu G_{24} . Pozostaje więc do rozważenia jedynie taki przypadek, gdy zarówno v_1 i v_3 należą do jednej składowej grafu G_{13} oraz v_2 i v_4 należą do jednej składowej grafu G_{24} . Wtedy będzie istniał szlak od v_1 do v_3 , w którym wierzchołki mają kolory na przemian 1/3 i będzie również istniał szlak od v_2 do v_4 , w którym wierzchołki mają kolory na przemian 2/4. Jednak gdy spróbujemy narysować dwa takie szlaki w planarnej reprezentacji grafu G , zobaczymy, że taka sytuacja jest niemożliwa. Rzeczywiście te dwa szlaki musiałyby przeciąć się w którymś wierzchołku; ponieważ taki wierzchołek należy do obu szlaków, więc musiałby być zarówno „koloru nieparzystego”, jak i „koloru parzystego”:



W ten sposób rozważyliśmy już wszystkie możliwe przypadki i pokazaliśmy, że wierzchołki grafu G mogą być pokolorowane pięcioma kolorami, co, na mocy indukcji, kończy dowód. $\square$

ZADANIA

1. Rozważmy mapę mającą mniej niż 12 regionów, w której stopień każdego wierzchołka jest co najmniej 3. Pokazać, że istnieje region ograniczony co najwyżej czterema krawędziami. [W]
Nie stosując twierdzenia o czterech kolorach, pokazać, że mapa taka może być pokolorowana czterema kolorami. [W]
2. Załóżmy, że pewna kolekcja monet o tej samej wielkości jest rozrzucona na stole tak, że żadne dwie monety nie nachodzą na siebie. Chcemy pokolorować te monety w taki sposób, aby żadne dwie stykające się nie miały tego samego koloru. Nie stosując twierdzenia o czterech kolorach, pokazać, że dla dowolnego ułożenia monet wystarczą cztery kolory oraz że dla pewnych ułożeń trzy kolory nie wystarczą. [W,O]
3. Pokazać, że mapa sześcienna może być pokolorowana czterema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy jest możliwe związanie z każdym wierzchołkiem

v liczby $p(v) \equiv \pm 1$ w ten sposób, że dla dowolnego cyklu $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$, którego krawędzie tworzą granicę jakiegoś regionu, zachodzi

$$p(v_1) + \dots + p(v_n) \equiv 0 \pmod{3} \quad [W]$$

4. Dla danych dwóch grafów $G_1 = (V, E_1)$ i $G_2 = (V, E_2)$ niech $G_1 \cup G_2$ będzie grafem $(V, E_1 \cup E_2)$. Pokazać, że

$$\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$$

gdzie, jak zwykle, $\chi(G)$ oznacza minimalną ilość kolorów, potrzebną do pokolorowania wierzchołków grafu G . [W]

Wywnioskować, że jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem, którego dopełnienie jest planarne, to $\chi(G) \geq |V|/5$. [W]

5. Na powierzchni torusa narysować sześcienną „mapę”, której nie można pokolorować sześcioma kolorami. [O]

15

Konfiguracje i kody

Rozdział ten dotyczy jednego aspektu „konfiguracji eksperymentów”, gdzie, mówiąc nieprecyzyjnie, pewne różne rodzaje towarów należy porównać jak najbardziej bezstronnie.

Przykład: Dziewięć gatunków kawy ma zostać rozdanych do testowania różnym rodzinom. Nie jest wskazane, by każda rodzina porównywała wszystkie dziewięć gatunków (po około czwartej próbie wszystkie one smakują tak samo!). Tak więc każda z dwunastu rodzin otrzyma do porównania trzy gatunki. Podać taką konfigurację eksperymentu, w której każda para gatunków, spośród dziewięciu jest porównywana w jednej rodzinie.

Rozwiązanie: Niech rodzaje kawy będą ponumerowane od 1 do 9. Rozdajmy dwunastu rodzinom do porównania następujące zestawy trzech gatunków:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \{7, 8, 9\}, \quad \{1, 4, 7\}, \quad \{1, 5, 9\}, \quad \{2, 5, 8\} \\ &\{3, 6, 9\}, \quad \{2, 6, 7\}, \quad \{3, 4, 8\}, \quad \{1, 6, 8\}, \quad \{2, 4, 9\}, \quad \{3, 5, 7\} \end{aligned}$$

Wówczas każda para liczb od 1 do 9 znajduje się w jednym z tych zbiorów. Zauważmy również (choć nie było to wymagane), że każdy gatunek kawy będzie testowany w czterech rodzinach. $\square$

Ten bardzo prosty przykład uzasadnia następującą definicję: *konfiguracja* (lub, w pełnym brzmieniu, *konfiguracja zrównoważona niepełna*) składa się z pewnych właściwych podzbiorów (lub *bloków*) zbioru punktów (lub *asortymentów*), z których każdy zawiera tę samą liczbę (> 1) punktów, przy czym jest spełniona kluczowa własność, że każda para punktów należy do tej samej liczby bloków. Jak zobaczymy teraz w naszym pierwszym twierdzeniu, konsekwencją tej definicji jest również to, że każdy punkt należy do tej samej liczby bloków:

Twierdzenie: Załóżmy, że jest dana konfiguracja z v punktami oraz b blokami, z których każdy zawiera k ($1 < k < v$) punktów, i taka, że każda para punktów należy do dokładnie λ bloków. Wówczas każdy punkt należy do dokładnie r bloków, gdzie

$$r = \frac{bk}{v} = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

Dowód: Niech x będzie dowolnym punktem konfiguracji i załóżmy, że x należy do dokładnie r_x bloków. Rozważmy wszystkie bloki konfiguracji i policzmy na dwa różne sposoby wszystkie pary zawierające punkt x .

Ponieważ x występuje w r_x blokach i w każdym z tych bloków x może być połączony w parę z $k-1$ innymi punktami, więc liczba par zawierających x wynosi $(k-1)r_x$. Ale ogółem x może być połączony w parę z dowolnym spośród $v-1$ pozostałych punktów i, na mocy definicji konfiguracji, każda para jest dokładnie w λ blokach. W ten sposób liczba wszystkich par zawierających x wynosi $\lambda(v-1)$. Stąd

$$(k-1)r_x = \lambda(v-1)$$

i

$$r_x = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

W szczególności r_x nie zależy od samego x , a więc każdy punkt jest w tej samej liczbie bloków, powiedzmy r .

Aby pokazać drugą część danej zależności, policzmy teraz, po prostu, na dwa sposoby elementy we wszystkich blokach. Liczba ta wynosi vr (każdy z v punktów występuje r razy), jak również bk (każdy z b bloków zawiera k punktów). W ten sposób mamy $vr = bk$, czyli

$$r = \frac{bk}{v}$$

co było do udowodnienia. $\square$

Z tym typem konfiguracji jest zatem związanych pięć parametrów:

v : liczba punktów,

b : liczba bloków,

r : liczba bloków zawierających dowolny wyszczególniony punkt,

k : liczba punktów w każdym bloku,

λ : liczba bloków zawierających dowolną wyszczególnioną parę punktów.

Będziemy odwoływać się do niej jako do „konfiguracji o parametrach (v, b, r, k, λ) ”. Tak więc rozwiązaniem powyższego przykładu kawowego jest konfiguracja o parametrach $(9, 12, 4, 3, 1)$. Przy badaniu konfiguracji są stosowane różne notacje. Ponieważ, jak pokazuje poprzednie twierdzenie, dowolne trzy spośród pięciu parametrów wyznaczają dwa pozostałe, więc niektórzy autorzy odwołują się do konfiguracji, podając tylko trzy spośród tych parametrów.

Warto zauważyć, że jeżeli mamy danych pięć dodatnich liczb całkowitych, spełniających zależności określone w poprzednim twierdzeniu (nawet jeżeli dodatkowo żądamy, aby $b \geq v$, co, jak się okazuje, zachodzi dla każdej konfiguracji), to wcale nie musi z tego wynikać, że istnieje konfiguracja o tych parametrach. Na przykład $v = b = 43$, $r = k = 7$ i $\lambda = 1$ spełniają te zależności, lecz, jak zobaczymy w zadaniach, nie istnieje żadna konfiguracja o parametrach $(43, 43, 7, 7, 1)$. W ogólnym przypadku konstrukcja konfiguracji jest zadaniem skomplikowanym mimo istniejących prostych technik, z których kilka przedstawimy w dalszej części tego rozdziału i w zadaniach.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, nasze szczególne konfiguracje są znane jako „zrównoważone niepełne konfiguracje”. Badania konfiguracji eksperymentów w rzeczywistości obejmują o wiele więcej aniżeli ten specyficzny rodzaj konfiguracji; na przykład „ t -konfiguracje” żądają, by każdy zbiór złożony z t punktów należał do stałej liczby bloków (zatem nasze konfiguracje są „2-konfiguracjami”). Zainteresowany czytelnik może znaleźć więcej szczegółów na ten temat w książce A.P. i D.J. Street *Combinatorics of experimental design*, która jest cytowana w spisie literatury.

Zanim przejdziemy do dalszych własności konfiguracji, podamy wygodny sposób ich reprezentacji przez macierze. Mamy daną rodzinę podzbiorów $(A_1, \dots, A_b)$ pewnego zbioru $\{x_1, \dots, x_v\}$, jej macierzą incydencji M jest macierz wymiaru $b \times v$, której element stojący w i -tym wierszu i j -tej kolumnie jest określony następująco:

$$(i, j)\text{-ty element w } M = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x_j \in A_i \\ 0 & \text{jeżeli } x_j \notin A_i \end{cases}$$

W ten sposób możemy rozważać macierz incydencji wymiaru $b \times v$ rodziny zbiorów, utworzonych z bloków konfiguracji o parametrach (v, b, r, k, λ) : oczywiście M zależy od uporządkowania bloków i od punktów, ale gdy M jest macierzą incydencji ustalonej konfiguracji, wówczas jest nią również każda macierz, otrzymana przez zamianę wierszy i kolumn macierzy M .

Przykład: Podana w poprzednim przykładzie konfiguracja o parametrach $(9, 12, 4, 3, 1)$, punktach 1–9 i blokach

$$\begin{array}{cccccc} \{1, 2, 3\}, & \{4, 5, 6\}, & \{7, 8, 9\}, & \{1, 4, 7\}, & \{1, 5, 9\}, & \{2, 5, 8\} \\ \{3, 6, 9\}, & \{2, 6, 7\}, & \{3, 4, 8\}, & \{1, 6, 8\}, & \{2, 4, 9\}, & \{3, 5, 7\} \end{array}$$

ma przedstawioną macierz incydencji, w której każdy wiersz w naturalny sposób reprezentuje blok:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑
r jedynek w każdej kolumnie

← k jedynek
← w każdym wierszu

Cztery spośród parametrów można od razu odnaleźć w macierzy M (tak jak pokazano), lecz parametr λ jest bardziej ukryty. Fakt, że M jest macierzą incydencji konfiguracji o parametrach $(9, 12, 4, 3, 1)$, oznacza, że dowolne dwa punkty leżą dokładnie w jednym z bloków; tj. każde dwie kolumny macierzy M mają jednocześnie jedynki dokładnie w jednym miejscu. W ogólności każde dwie kolumny macierzy konfiguracji o parametrach (v, b, r, k, λ) będą miały jednocześnie jedynki na λ miejscach. Jednakże bardziej ścisłym sposobem wyróżnienia parametru λ jest obliczenie iloczynu macierzy $M^T M$, gdzie T oznacza macierz transponowaną; można łatwo sprawdzić, że w tym przypadku wynosi ona:

$$M^T M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

W ogólnym przypadku ten iloczyn będzie miał na głównej przekątnej parametr r , a na pozostałych miejscach parametr λ . $\square$

Twierdzenie: Niech M będzie macierzą incydencji rodziny b podzbiorów zbioru złożonego z v elementów, przy czym każdy podzbiór zawiera dokładnie k elementów ($1 < k < v$). Wówczas M jest macierzą incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, b, r, k, λ) wtedy i tylko wtedy, gdy $M^T M$ jest macierzą wymiaru $v \times v$

$$\begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix}$$

Ponadto ta macierz wymiaru $v \times v$ ma dodatni wyznacznik $(r + (v-1)\lambda)(r - \lambda)^{v-1}$

Dowód: Nietrudno sprawdzić, że rodzina zbiorów tworzy konfigurację wtedy i tylko wtedy, gdy $M^T M$ ma żadaną postać. Rzeczywiście (i, j) -ty element w macierzy $M^T M$ można przedstawić schematycznie w następujący sposób:

$$\boxed{i\text{-ty wiersz w } M^T} \cdot \boxed{j\text{-ta kolumna w } M} = \boxed{i\text{-ta kolumna w } M} \cdot \boxed{j\text{-ta kolumna w } M} = \begin{cases} \text{liczba jedynek w } i\text{-tej kolumnie} \\ \text{macierzy } M \text{ (} i = j \text{)} \\ \text{liczba miejsc, w których są jedynki w obu,} \\ i\text{-tej oraz } j\text{-tej, kolumnach (} i \neq j \text{)} \end{cases}$$

a te będą stałymi, odpowiednio r i λ , wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory tworzą konfigurację o parametrach (v, b, r, k, λ) .

Elementarne operacje na wierszach i kolumnach macierzy wymiaru $v \times v$ pozwalają obliczyć jej wyznacznik w prosty sposób: dodanie wszystkich wierszy do pierwszego, a następnie odjęcie pierwszej kolumny od każdej z pozostałych daje

$$\det \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r + (v-1)\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & r - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & r - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & r - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & r - \lambda \end{pmatrix}$$

co jest równe $(r + (v-1)\lambda)(r - \lambda)^{v-1}$.

Na koniec, aby przekonać się, że wyznacznik ten jest dodatni, wystarczy jedynie udowodnić, że $r - \lambda > 0$. To jednak wynika z poprzedniego twierdzenia, gdyż mając na uwadze nierówność $1 < k < v$, otrzymujemy

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} > \lambda \quad \square$$

Jesteśmy już gotowi udowodnić inną zależność między parametrami v, b, r, k, λ danej konfiguracji, mianowicie, że $b \geq v$: innymi słowy, każdy eksperyment porównujący v asortymentów w sposób bezstronny za pomocą konfiguracji potrzebuje co najmniej taką liczbę bloków. Nierówność ta została po raz pierwszy udowodniona w 1940 r. przez znakomitego statystyka Sir Ronalda Fishera.

Twierdzenie: (Nierówność Fishera) W dowolnej konfiguracji o parametrach (v, b, r, k, λ) zachodzi $b \geq v$.

Dowód: Załóżmy, że mamy pewną konfigurację o parametrach (v, b, r, k, λ) , dla której $b < v$: wywnioskujemy stąd sprzeczność. Niech M będzie macierzą incydencji dla tej konfiguracji: jest to macierz wymiaru $b \times v$ i ma ona mniej wierszy niż kolumn. Dodajmy do M $v - b$ zerowych wierszy, tworząc macierz N wymiaru $v \times v$. Wówczas, schematycznie,

$$N = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$$

i

$$N^T N = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = M^T M$$

która, jak widzieliśmy w poprzednim twierdzeniu, ma dodatni wyznacznik.

N jest macierzą kwadratową, a więc ma „dobrze zdefiniowany” wyznacznik (który jest równy wyznacznikowi macierzy N^T). Stąd

$$(\det N)^2 = \det N^T \cdot \det N = \det(N^T N) = \det(M^T M) > 0$$

Lecz to przeczy faktowi, że N ma cały wiersz złożony z zer (a więc ma zerowy wyznacznik). Ta sprzeczność pokazuje, że rzeczywiście $b \geq v$. $\square$

W ten sposób w każdej konfiguracji jest co najmniej tyle bloków, ile punktów i, w pewnym sensie, najbardziej ekonomicznymi konfiguracjami są te, w których liczba bloków jest równa liczbie punktów. W takiej konfiguracji mamy również $r = bk/v = k$, a więc jej parametrami są v, v, k, k, λ i taka konfiguracja nazywa się *symetryczną*. Zanim przejdziemy do pewnych własności symetrycznych konfiguracji, pokażemy, jak skonstruować ich specjalny typ, zwany konfiguracją „cykliczną”.

Przykład: Każda z następujących dwóch macierzy powstała z „cyklicznej” konstrukcji, w której po zadaniu pierwszego wiersza każdy następny wiersz jest otrzymywany z poprzedniego przez „przesunięcie” o jedno miejsce w prawo (przestawiając w ten sposób ostatni element na pierwsze miejsce):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

macierz incydencji konfiguracji
o parametrach (11, 11, 5, 5, 2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nie jest to macierz incydencji
żadnej konfiguracji

Jeżeli punktami tej konfiguracji są 0, 1, 2, ..., 10, to pierwszy blok jest postaci {1, 3, 4, 5, 9}, a każdy kolejny blok jest otrzymany dodając 1 (modulo 11) do każdego wyrazu poprzedniego bloku. W tym przypadku otrzymamy pewną konfigurację.

Tabela ukazująca różnice (mod 11) dla elementów z pierwszego bloku {1, 3, 4, 5, 9} ma postać

– (mod 11)	1	3	4	5	9
1	0	9	8	7	3
3	2	0	10	9	5
4	3	1	0	10	6
5	4	2	1	0	7
9	8	6	5	4	0

Zauważmy, że każdy niezerowy wyraz tej tabeli występuje tę samą liczbę razy. (Rzeczywiście, każdy z nich występuje dwa razy i nie jest przypadkowe to, że dla tej konfiguracji parametr $\lambda = 2$).

Tutaj takie samo postępowanie, w którym pierwszym blokiem jest {1, 4, 5, 7, 9}, nie da w efekcie żadnej konfiguracji. Na przykład para punktów {0, 1} należy do dokładnie jednego ze zbiorów, podczas gdy para {6, 9} należy do trzech zbiorów, które zostały wyróżnione.

W tym przypadku różnice (mod 11) elementów pierwszego bloku {1, 4, 5, 7, 9} wynoszą

– (mod 11)	1	4	5	7	9
1	0	8	7	5	3
4	3	0	10	8	6
5	4	1	0	9	7
7	6	3	2	0	9
9	8	5	4	2	0

Zauważmy, że różnica 1 występuje w tej tabeli tylko raz, podczas gdy liczba 3 występuje trzy razy. W rzeczywistości w obu przykładach liczba bloków zawierających i oraz j jest równa liczbie wystąpień $|i - j|$ w tablicy różnic. $\square$

Podzbiór P zbioru $\{0, 1, 2, \dots, v - 1\}$ nazywa się *doskonałym zbiorem różnicowym* (mod v), jeżeli w tablicy zawierającej różnice modulo v elementów z P każda z liczb $1, 2, \dots, v - 1$ wystąpi taką samą ilość razy. Tak więc w powyższym przykładzie {1, 3, 4, 5, 9} jest doskonałym zbiorem różnicowym (mod 11), tworzącym także pierwszy zbiór konfiguracji wyznaczonej przez „cykliczną” procedurę. Natomiast {1, 4, 5, 7, 9} nie jest doskonałym zbiorem różnicowym (mod 11) i dla tego zbioru procedura nie tworzy konfiguracji.

Twierdzenie: Niech $B_0 = \{b_1, \dots, b_k\}$ będzie podzbiorem zbioru $\{0, 1, 2, \dots, v - 1\}$, gdzie $1 < k < v$. Dalej, niech $+$ oznacza dodawanie modulo v oraz dla $0 \leq i \leq v - 1$ niech B_i będzie zbiorem $B_i = \{b_1 + i, \dots, b_k + i\}$. Wówczas zbiory $B_0, B_1, \dots, B_{v-1}$ tworzą konfigurację wtedy i tylko wtedy, gdy B_0 jest doskonałym zbiorem różnicowym (mod v). (Taka konfiguracja nazywa się *cykliczną*).

Dowód: Rozważmy zbiory $B_0, \dots, B_{v-1}$: wszystkie o tej samej liczbie elementów. Aby zobaczyć, czy tworzą one konfigurację, musimy sprawdzić, czy dowolne dwa spośród v punktów należą do tej samej liczby zbiorów. Cykliczna struktura zbiorów oznacza, że na przykład punkty 0 i 3 wystąpią w dokładnie tej samej liczbie zbiorów, co punkty 1 i 4 lub 2 i 5 itd. Możemy wziąć więc dowolne j

z $\{1, 2, \dots, v-1\}$ i wyznaczyć, ile spośród zbiorów $B_0, \dots, B_{v-1}$ zawiera oba punkty 0 oraz j (będzie to trochę łatwiejsze, gdy założymy, nie tracąc na ogólności, że $0 \notin B_0$).

Kiedy 0 oraz j pojawiają się równocześnie w zbiorze B_i ? Łatwo zauważyć, że może to mieć miejsce tylko w następującym przypadku:

$$B_i = \{b_1+i, \dots, \underbrace{b_\alpha+i}_{=0?}, \dots, \underbrace{b_\beta+i}_{=j?}, \dots, b_k+ui\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $i = v - b_\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_\beta + i \equiv j \pmod{v}$

Twierdzimy, że 0 oraz j należą do zbioru B_i , tak jak pokazano, wtedy i tylko wtedy, gdy $i = v - b_\alpha$ oraz $b_\beta - b_\alpha \equiv j \pmod{v}$. Rzeczywiście, jeżeli oba 0 oraz j należą do B_i , to

$$i = v - b_\alpha \quad \text{oraz} \quad j \equiv b_\beta + i = b_\beta + (v - b_\alpha) \equiv b_\beta - b_\alpha \pmod{v}$$

jak twierdziliśmy. Na odwrót, jeżeli $i = v - b_\alpha$ i $b_\beta - b_\alpha \equiv j \pmod{v}$, to

$$i = v - b_\alpha \quad \text{oraz} \quad b_\beta + i = (b_\beta - b_\alpha) + (b_\alpha + i) \equiv j \pmod{v}$$

a więc 0 i j należą do zbioru B_i . Stąd w każdym przypadku, gdy $j \equiv b_\beta - b_\alpha \pmod{v}$, to zarówno 0, jak i j należą do zbioru B_{v-b_α} , a wszystkie te przypadki zachodzą w ten sam sposób. W konsekwencji istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność między tym, jak często 0 oraz j są wspólnie w którymś ze zbiorów $B_0, \dots, B_{v-1}$, a tym, ile razy dwa elementy z B_0 różnią się o j modulo v (co jest równoznaczne z tym, ile razy j wystąpi w tabeli różnic modulo v wyznaczonej przez B_0).

W ten sposób dowolne dwa punkty wystąpią w tej samej liczbie zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba j ($1 \leq j < v$) wystąpi taką samą ilość razy w tabeli różnic modulo v związanej z B_0 ; tj. wtedy i tylko wtedy, gdy B_0 jest doskonałym zbiorem różnicowym (mod v). $\square$

Aby to twierdzenie miało jakiegokolwiek praktyczne znaczenie przy konstrukcji konfiguracji, musimy znać systematyczny sposób znajdowania doskonałych zbiorów różnicowych.

Przykład: Utwórzmy potęgi liczby 2 modulo 19, otrzymując:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2, & 2^2 &= 4, & 2^3 &= 8, & 2^4 &= 16, & 2^5 &= (32 \equiv) 13, & 2^6 &= 7, & 2^7 &= 14, \\ 2^8 &= 9, & 2^9 &= 18, & 2^{10} &= 17, & 2^{11} &= 15, & 2^{12} &= 11, & 2^{13} &= 3, & 2^{14} &= 6, \\ 2^{15} &= 12, & 2^{16} &= 5, & 2^{17} &= 10, & 2^{18} &= 1, \dots \end{aligned}$$

Przyjrzyjmy się teraz zbiorowi potęg parzystych $Q = \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$. Jest to doskonały zbiór różnicowy (modulo 19), jak pokazuje to następująca tabela:

— (mod 19)	1	4	5	6	7	9	11	16	17
1	0	16	15	14	13	11	9	4	3
4	3	0	18	17	16	14	12	7	6
5	4	1	0	18	17	15	13	8	7
6	5	2	1	0	18	16	14	9	8
7	6	3	2	1	0	17	15	10	9
9	8	5	4	3	2	0	17	12	11
11	10	7	6	5	4	2	0	14	13
16	15	12	11	10	9	7	5	0	18
17	16	13	12	11	10	8	6	1	0

każda niezerowa
liczba występuje
cztery razy

Rozpoczynając od zbioru $Q = \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$ i dodając sukcesywnie 1 modulo 19, otrzymamy konfigurację cykliczną o parametrach $(19, 19, 9, 9, 9, 4)$. $\square$

W tym przykładzie liczby 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17 są nazywane „kwadratowymi residuami” nad operacją mnożenia modulo 19, ponieważ przy tej operacji okazują się one być kwadratami liczb. Zobaczymy teraz, jak proces opisany w tym przykładzie uogólnia się na przypadek dowolnego $v = 4n - 1$, które jest liczbą pierwszą: w twierdzeniu i jego dowodzie zakładamy, że zachodzą pewne algebraiczne własności mnożenia modulo v .

Twierdzenie: Niech v będzie liczbą pierwszą postaci $4n - 1$, dla pewnego całkowitego n . Niech θ generuje $\{1, \dots, v-1\}$ przy operacji mnożenia modulo v ; tj. $\{\theta, \theta^2, \dots, \theta^{v-1}\}$ jest całym zbiorem $\{1, \dots, v-1\}$. Wówczas zbiór „kwadratowych residuów (mod v)” $\{\theta^2, \theta^4, \dots, \theta^{v-1}\}$ jest doskonałym zbiorem różnicowym (mod v) i tworzy pierwszy zbiór konfiguracji cyklicznej o parametrach $(4n-1, 4n-1, 2n-1, 2n-1, n-1)$.

Dowód: Będziemy tu działać na zbiorze $\{0, 1, \dots, v-1\}$ ze zwykłymi arytmetycznymi operacjami modulo v (tworząc z niego ciało, a więc w szczególności istnieje „-1” zachowująca się w sposób naturalny). Przy takim podejściu $\theta^{v-1} = 1$, $\theta^v = \theta$, $\theta^{v+1} = \theta^2$ itd., a więc żadna parzysta potęga θ nie równa się nigdy nieparzystej potędze i Q składa się dokładnie ze wszystkich parzystych potęg θ . Zauważmy również, że ponieważ $(-1)^2 = 1 = \theta^{v-1}$, to $-1 = \theta^{(v-1)/2} = \theta^{2n-1}$.

Teraz niech $1 \leq i, j < v$ i niech $j \cdot i^{-1} = \theta^k$. Pokażemy, w jaki sposób każdemu elementowi i w tabeli różnic (modulo v) związanej z Q odpowiada dokładnie jeden element j . Spójrzmy więc na dowolny, określony element i w tabeli, powiedzmy $i = \theta^{2a} - \theta^{2b}$. Wówczas

$$j = \theta^k \cdot i = \theta^k (\theta^{2a} - \theta^{2b}) = \theta^{2a+k} - \theta^{2b+k}$$

Jeżeli k jest liczbą parzystą, to powyższe wyrażenie przedstawia j jako różnicę elementów z Q . Jeżeli natomiast k jest liczbą nieparzystą, to

$$\begin{aligned} j &= \theta^{2a+k} - \theta^{2b+k} = (-1) \cdot (\theta^{2b+k} - \theta^{2a+k}) = \theta^{2n-1} \cdot (\theta^{2b+k} - \theta^{2a+k}) \\ &= \theta^{2b+k+2n-1} - \theta^{2a+k+2n-1} \end{aligned}$$

i ponownie j jest wyrażone przez różnicę dwóch elementów z Q .

W ten sposób każdemu elementowi z wiersza odpowiadającego liczbie i w tabeli różnic dla Q jest przyporządkowany element z kolumny, odpowiadającej liczbie j . Po chwili zastanowienia uświadomimy sobie, że różne elementy z wiersza i będą dawały w ten sposób różne elementy z kolumny j . Zatem j występuje w tej tabeli co najmniej tak często, jak i , więc na mocy symetrii wynika stąd, że i oraz j występują taką samą ilość razy. Tak więc dowolne dwie liczby ze zbioru $\{1, \dots, v-1\}$ występują taką samą ilość razy w tabeli różnic dla Q , czyli Q jest doskonałym zbiorem różnicowym, jak twierdziliśmy.

W ten sposób, stosując poprzednie twierdzenie, Q jest pierwszym zbiorem konfiguracji cyklicznej: ma ona parametry

$$b = v = 4n - 1, \quad r = k = |Q| = \frac{1}{2}(v-1) = 2n - 1$$

i

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{4n-2} = n-1$$

co było do udowodnienia. $\square$

Kiedy dla liczby pierwszej n konstruowaliśmy $n-1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich (strona 75), zastosowaliśmy arytmetykę modulo i zauważyliśmy, że biorąc ciało Galois $GF(n)$, cały proces można było uogólnić do przypadku, gdy n było potęgą liczby pierwszej. Miało to miejsce dlatego, że istotna część konstrukcji zależała jedynie od istnienia ciała na zbiorze $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Stosując podobny argument, poprzednie dwa twierdzenia mogą być uogólnione do konstrukcji cyklicznych konfiguracji o parametrach $(4n-1, 4n-1, 2n-1, 2n-1, n-1)$, gdy tylko $v = 4n-1$ jest potęgą liczby pierwszej. Szczegóły takiego uogólnienia oraz inne konstrukcje konfiguracji cyklicznych można znaleźć w książce autorstwa Street i Street, wspomnianej wcześniej.

Tak zwane „symetryczne” konfiguracje (tj. te, dla których $b = v$) zyskały tę nazwę ze względu na specjalną własność, którą teraz zilustrujemy.

Przykład: Spójrzmy na symetryczną konfigurację o parametrach $(7, 7, 3, 3, 1)$ mającą bloki $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$.

Ma ona macierz incydencji

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że w tym przypadku macierz transponowana do M jest określona następująco:

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jest ona przy tym macierzą innej konfiguracji o parametrach $(7, 7, 3, 3, 1)$ mającej bloki $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{5, 6, 7\}$: ta nowa konfiguracja nazywa się „dualną” do konfiguracji wyjściowej. $\square$

Twierdzenie: Jeżeli M jest macierzą incydencji konfiguracji symetrycznej, to również tę własność ma macierz M^T (nowa konfiguracja nazywa się *dualną* do zadanej konfiguracji).

Dowód: Niech M będzie macierzą incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) . Wówczas M jest macierzą zero-jedynkową wymiaru $v \times v$ o dokładnie k jedynkach w każdym wierszu i każdej kolumnie. Jeżeli teraz Λ będzie macierzą wymiaru $v \times v$ o wszystkich elementach równych λ , a I będzie macierzą identycznościową wymiaru $v \times v$, to, na podstawie twierdzenia ze strony 202,

$$M^T M = \begin{pmatrix} k & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & k & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix} = \Lambda + (k - \lambda)I$$

M^T jest macierzą wymiaru $v \times v$ o dokładnie k jedynkach w każdym wierszu, a więc na mocy tego samego twierdzenia (zastosowanego do M^T zamiast do M), by udowodnić, że M^T jest macierzą incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) , musimy pokazać, że również $(M^T)^T M^T$ jest równe $\Lambda + (k - 1)I$. Innymi słowy, musimy pokazać, że MM^T równa się $M^T M$ (to jest żądane w tym dowodzie: w ogólnym przypadku nie jest prawdą, że mnożenie macierzy przez jej macierz transponowaną jest przemienne).

Zauważmy, że, tak jak poprzednio, $\det(M^T M) > 0$, a ponieważ M jest macierzą kwadratową, mamy

$$(\det M)^2 = \det M^T \cdot \det M = \det(M^T M) > 0$$

Wynika stąd, że $\det M \neq 0$ i że istnieje macierz odwrotna do M . Zauważmy również, że ponieważ każdy wiersz i każda kolumna macierzy M zawiera dokładnie k jedynek, to

$$M \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\lambda & k\lambda & k\lambda & \dots & k\lambda \\ k\lambda & k\lambda & k\lambda & \dots & k\lambda \\ k\lambda & k\lambda & k\lambda & \dots & k\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\lambda & k\lambda & k\lambda & \dots & k\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \end{pmatrix} M$$

tj. $M\Lambda = \Lambda M$. Stąd

$$\begin{aligned} MM^T &= (MM^T)(MM^{-1}) \\ &= M(M^T M)M^{-1} \\ &= M(\Lambda + (k - \lambda)I)M^{-1} \\ &= M\Lambda M^{-1} + (k - \lambda)MIM^{-1} \\ &= \Lambda MM^{-1} + (k - \lambda)I \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} MM^T &= (MM^T)(MM^{-1}) \\ &= M(M^T M)M^{-1} \\ &= M(\Lambda + (k - \lambda)I)M^{-1} \\ &= M\Lambda M^{-1} + (k - \lambda)MIM^{-1} \right\} \text{ponieważ } M\Lambda = \Lambda M$$

$$\begin{aligned} &= \Lambda + (k - \lambda)I \\ &= M^T M \end{aligned}$$

tak, jak twierdziliśmy.

W ten sposób M^T jest macierzą wymiaru $v \times v$ z k jedynekami w każdym wierszu, dla której

$$(M^T)^T M^T = \begin{pmatrix} k & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & k & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix}$$

Stąd, jak wspomniano powyżej, twierdzenie ze strony 202 pokazuje, że M^T jest macierzą incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) , co należało udowodnić. $\square$

Wniosek pierwszy: Każde dwa bloki należące do konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) mają dokładnie λ wspólnych elementów.

Dowód: Niech M będzie macierzą incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) . Wówczas, na podstawie twierdzenia, M^T jest również macierzą incydencji pewnej konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) . Tak więc dowolne dwie

kolumny macierzy M^T mają jedynki łącznie na dokładnie λ miejscach; tj. dowolne dwa wiersze macierzy M mają jedynki łącznie na dokładnie λ miejscach.

Teraz, rozważając przekrój (część wspólną) dwóch bloków konfiguracji, spójrzmy na odpowiadające im dwa wiersze w macierzy M . Wówczas liczba elementów należących do przekroju tych dwóch bloków jest równa liczbie miejsc, w których te oba wiersze mają elementy równe 1: na podstawie powyższych komentarzy wnioskujemy, że liczba ta jest równa λ . $\square$

Wniosek drugi: Dowolne dwa wiersze macierzy incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) różnią się na dokładnie $2(k - \lambda)$ miejscach.

Dowód: Z pierwszego wniosku wynika w sposób oczywisty, że dowolne dwa wiersze macierzy incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) (w której dla wygody zmieniono porządek kolumn) wyglądają następująco:

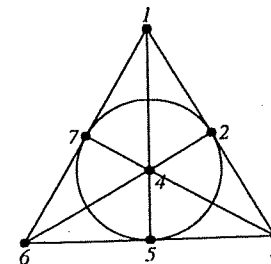
$$\begin{array}{cccc|ccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

← k →

Jest więc $k - \lambda$ miejsc zawierających jedynki z pierwszego wiersza i zera z drugiego i $k - \lambda$ miejsc zawierających zera z pierwszego wiersza i jedynki z drugiego. Stąd wynika nasz wniosek. $\square$

W ten sposób konfiguracja symetryczna, oprócz tego, że jest najbardziej „ekonomiczna”, ma specjalną własność dualności, i w szczególności, dowolne dwa jej bloki mają taką samą liczbę wspólnych elementów. Własności te można zaobserwować w konfiguracjach cyklicznych, skonstruowanych powyżej. Jednakże to nie jest jedyna klasa konfiguracji symetrycznych, z którą mieliśmy do czynienia. Chociaż można tego nie skojarzyć, mieliśmy już do czynienia z innym typem konfiguracji symetrycznych w momencie rozważania skończonych płaszczyzn rzutowych (strona 78): okazuje się, że aktualne rozważania o konfiguracjach zawierają tamte wcześniejsze wyniki.

Przykład: Ponownie mamy tutaj do czynienia ze skończoną płaszczyzną rzutową rzędu 2: jej liniami są $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$ i $\{3, 4, 7\}$. Zauważmy, że linie te tworzą bloki dla konfiguracji o parametrach $(7, 7, 3, 3, 1)$. (Ponadto poprzednie twierdzenie o konfiguracjach dualnych jest pewnym uogólnieniem pojęcia dualności punktów i linii w tej geometrii, o której wspominaliśmy w rozdziale 5). $\square$



Twierdzenie: Skończona płaszczyzna rzutowa wymiaru n jest identyczna z konfiguracją o parametrach $(n^2 + n + 1, n^2 + n + 1, n + 1, n + 1, 1)$; tzn. linie skończonej płaszczyzny rzutowej wymiaru n tworzą bloki takiej konfiguracji i na odwrót.

Dowód: Załóżmy najpierw, że mamy zadaną skończoną płaszczyznę rzutową wymiaru n . Przypomnijmy, że składa się ona ze zbioru punktów i rodziny „linii” (które są podzbiorami tych punktów), mających następujące własności:

- (i) każde dwa punkty leżą na dokładnie jednej linii,
- (i)' każde dwie linie przecinają się w dokładnie jednym punkcie,
- (ii) każda linia zawiera $n + 1$ punktów,
- (ii)' każdy punkt leży na $n + 1$ liniach.

Czy linie te tworzą bloki konfiguracji? Oczywiście że tak, ponieważ po pierwsze mają tyle samo elementów (własność (ii)) i po drugie każde dwa punkty należą do tej samej liczby bloków/linii (własność (i)). Mamy więc konfigurację, dla której $k = n + 1$ i $\lambda = 1$. Ponadto, na podstawie własności (i)' stwierdzamy, że $r = n + 1$. Stąd pozostałe dwa parametry, b oraz v , określone są następująco:

$$n + 1 = \frac{b(n + 1)}{v} = \frac{v - 1}{n}$$

skąd wynika, że $b = v = n^2 + n + 1$. W ten sposób rzeczywiście otrzymaliśmy konfigurację o parametrach $(n^2 + n + 1, n^2 + n + 1, n + 1, n + 1, 1)$, tak jak twierdziliśmy. (Tak naprawdę, stosowaliśmy już bardzo podobne rozumowanie, rozwiązując zadanie 7 ze strony 83, ale nie znając jeszcze pojęcia konfiguracji.)

Na odwrót załóżmy, że mamy zadaną konfigurację o parametrach $(n^2 + n + 1, n^2 + n + 1, n + 1, n + 1, 1)$. Jeżeli traktujemy bloki jako linie, to jest oczywiste, że zadane parametry implikują własności (i), (ii) oraz (ii)':

$$\begin{array}{ccccccc} (n^2 + n + 1, & n^2 + n + 1, & n + 1, & n + 1, & 1) \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & (ii)' & (ii) & (i) \end{array}$$

Pozostała własność (i)' wynika bezpośrednio z pierwszego wniosku, przedstawionego powyżej, który mówi, że każde dwa bloki tej konfiguracji mają dokładnie jeden wspólny element. Bloki konfiguracji rzeczywiście tworzą linie skończonej płaszczyzny rzutowej wymiaru n , co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Przedstawiona metoda konstrukcji skończonych płaszczyzn rzutowych za pomocą kwadratów łacińskich (strony 79–82) jest kolejnym sposobem konstrukcji pewnych konfiguracji symetrycznych. Ponadto nieistnienie skończonej płaszczyzny rzutowej wymiaru 6 jest równoważne z nieistnieniem konfiguracji o parametrach $(43, 43, 7, 7, 1)$ (wyprowadzimy to w zadaniach). Podobnie, skończona płaszczyzna rzutowa wymiaru 10 jest równoważna konfiguracji o parametrach $(111, 111, 11, 11, 1)$; nieistnienie takiej konfiguracji pokazano w 1989 r. za pomocą komputera.

Okazuje się, że konfiguracje symetryczne są wykorzystywane nie tylko w projektowaniu rzetelnych eksperymentów, ale również w obecnych zastosowaniach matematyki w „kodach korygujących błędy”. Najpierw więc omówimy ogólną

teorię takich kodów, a następnie wykorzystamy konfiguracje do ich konstrukcji. Załóżmy, że chcemy przesłać elektronicznie jakąś wiadomość: wówczas wiadomość ta musi zostać przetłumaczona na język elektroniki; w naszych rozważaniach będzie to oznaczało kodowanie jej w postaci ciągu złożonego z zer i jedynek. (Są one czasami znane pod nazwą kodów „binarnych”).

Przykład: Jako bardzo prosty przykład wyobraźmy sobie, że zawsze chcemy przesłać tylko jeden z czterech wyrazów „Północ”, „Południe”, „Wschód” lub „Zachód”. Najprostszy kod binarny otrzymujemy, tłumacząc każde z tych słów na następujące „słowa kodowe”

$$N \rightarrow 00 \quad S \rightarrow 01 \quad E \rightarrow 10 \quad W \rightarrow 11$$

(W naszych kodach każde słowo kodowe będzie używało tej samej liczby cyfr; liczba ta nazywa się *długością* kodu. Tak więc w tym przykładzie kod ma długość 2.) $\square$

Ze względu na możliwość powstania błędu przy przesyłaniu elektronicznych informacji, jest pożądane czasami bezpieczniejsze kodowanie przez dodanie pewnych sprawdzających elementów.

Przykład — drugie podejście: W naszym prostym kodzie pojedynczy błąd może spowodować otrzymanie nieprawdziwej wiadomości. Na przykład błąd tylko w jednej cyfrze przy transmisji słowa „Północ” mógłby spowodować, że zostanie ono odczytane jako „Południe”. Następujący kod długości 3 jest pewnym udoskonaleniem wcześniejszego kodu:

$$N \rightarrow 000 \quad S \rightarrow 011 \quad E \rightarrow 101 \quad W \rightarrow 110$$

Dodatkowa „sprawdzająca” cyfra została tak wybrana, że każde ze słów kodujących zawiera parzystą liczbę jedynek. Jeżeli więc podczas transmisji jednego z tych słów wystąpi błąd w jednej cyfrze, to otrzymana wiadomość będzie zawierała nieparzystą liczbę jedynek. Wiadomość ta nie będzie więc jednym ze słów kodujących, które można zaakceptować, i otrzymujący ją będzie wiedział, że w trakcie transmisji wystąpił błąd: osoba wysyłająca może więc być poproszona o ponowne jej nadanie. Jest to więc przykład kodu, który może rozpoznawać błąd. (Ta sama zasada, o bardziej skomplikowanym kodzie, jest stosowana, gdy kasjer w supermarkecie odczytuje elektronicznie kody kresk na towarach: w przypadku wystąpienia błędu skomputeryzowana kasa rozpoznaje ten fakt i daje „sygnał” kasjerowi). $\square$

Przykład ten ilustruje, jak kod może wykrywać błędy (lub przynajmniej ich ograniczoną liczbę). Niekiedy jednak jest niemożliwe powiadomić „nadajnik”, aby powtórzył wiadomość (jak w przypadku zakodowanej informacji o pogodzie, nadawanej z satelity na orbicie lub zakodowanego dźwięku z płyty kompaktowej), i wtedy potrzebujemy jeszcze bardziej udoskonalonych kodów.

Przykład — trzecie podejście: Gdyby przy zastosowaniu poprzedniego kodu napłynęła wiadomość 001, wówczas (ponieważ nie jest to żadne możliwe do zaakceptowania słowo kodowe) adresat wiedziałby, że wystąpił błąd. Ale nawet zakładając, że wystąpił błąd tylko w jednej cyfrze, nie jest możliwe stwierdzić, czy zamierzoną informacją było 000 („Północ”), czy 011 („Południe”), czy też 101 („Wschód”). Tak więc (jeżeli byłoby to możliwe) adresat poprosiłby o ponowne nadanie tej wiadomości. Okazuje się jednak, że możemy jeszcze bardziej udoskonalić nasz kod w sposób następujący:

$N \rightarrow 000111 \quad S \rightarrow 011010 \quad E \rightarrow 101100 \quad W \rightarrow 110001$

Chociaż ten kod jest dwa razy dłuższy, ma wielką przewagę nad poprzednim. Po pierwsze może rozpoznać wystąpienie błędu aż do trzech niepoprawnie przesłanych cyfr w słowie. Wynika to stąd, że jest niemożliwe, zmieniając trzy lub mniej cyfry, otrzymać jedno, możliwe do zaakceptowania słowo kodujące z drugiego. Lecz zasadnicze udoskonalenie polega na tym (zakładając, iż nasze wyposażenie jest odpowiednio niezawodne), że tu adresat może faktycznie skorygować wiadomość, nie prosząc o jej ponowne nadanie. Załóżmy na przykład, że otrzymaną wiadomością jest 111001: tego słowa kodowego nie można zaakceptować, a więc musiał nastąpić błąd. Jaka więc była zamierzona informacja?

„Północ”? tj. 000111: potrzebnych byłoby pięć zmian, aby uczynić z tego 111001.

„Południe”? tj. 011010: potrzebne byłyby trzy zmiany, aby uczynić z tego 111001.

„Wschód”? tj. 101100: potrzebne byłyby trzy zmiany, aby uczynić z tego 111001.

„Zachód”? tj. 110001: potrzebna byłaby jedna zmiana, aby uczynić z tego 111001.

Mając na uwadze założenie, że wyposażenie jest tak niezawodne, iż wystąpienie więcej niż jednego błędu jest wielce nieprawdopodobne, adresat odkoduje wiadomość jako „Zachód”, będącą słowem, które wymaga najmniejszej liczby korekt, aby otrzymać przesłaną wiadomość. $\square$

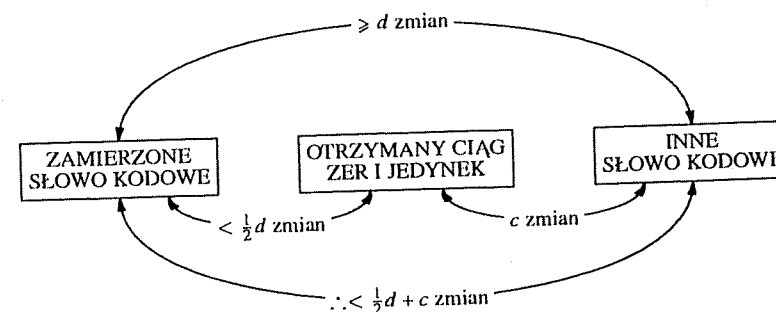
Jest to prosty przykład „kodu korygującego błędy”: potrafi on wykryć je, jeżeli na jedno słowo przypadają mniej niż cztery błędy i w rzeczywistości potrafi skorygować je, gdy na jedno słowo przypadają mniej niż dwa błędy. Decydującą własnością słów kodowych, która daje im możliwość korygowania błędów jest ta, że potrzeba czterech zmian wśród cyfr, aby uczynić z jednego słowa kodowego inne. Przedstawimy teraz proste uogólnienie tej własności, które jest kluczem do teorii kodów korygujących błędy.

Twierdzenie: Niech słowa kodowe pewnego kodu mają tę własność, że potrzebnych jest co najmniej d zmian w ich cyfrach, aby otrzymać jedno słowo kodowe z drugiego. Wówczas kod może:

- (i) wykryć błędy, jeżeli w każdym słowie popełniono mniej niż d błędów;
- (ii) korygować błędy, jeżeli w każdym słowie popełniono mniej niż $\frac{1}{2}d$.

Dowód: (i) Potrzebnych jest co najmniej d zmian, aby z jednego słowa kodowego otrzymać inne. Tak więc, jeżeli nastąpi co najmniej jedna (lecz mniej niż d) zmiana w trakcie transmisji słowa kodującego, to otrzymany ciąg zer i jedynek nie może być słowem kodowym do zaakceptowania. W tym przypadku adresat zorientuje się więc, że nastąpił błąd.

(ii) Tym razem maksymalna liczba błędów jest jeszcze mniejsza, a więc ponownie błędy zostaną zauważone. Ale jeżeli jest mniej niż $\frac{1}{2}d$ zmian między zamierzonym słowem kodowym a rzeczywiście otrzymanym ciągiem zer i jedynek, to ile jest zmian między tym otrzymanym ciągiem a dowolnym *innym* słowem kodowym? Rozważmy jakiegokolwiek słowo kodowe i niech będzie c zmian, tak jak pokazano:



Ten wykres zmian pokazuje, że $\frac{1}{2}d + c > d$, a stąd, że $c > \frac{1}{2}d$. W ten sposób zamierzone słowo kodowe jest jedynym spośród słów kodowych, które może być otrzymane z przesłanego ciągu za pomocą mniej niż $\frac{1}{2}d$ zmian. Tak więc w tym przypadku zamierzone słowo kodowe jest jednoznacznie wyznaczone jako słowo kodowe, wymagające najmniej zmian w otrzymanym ciągu, i adresat może odczytać zamierzoną informację, bez względu na przekłamania. $\square$

O ogólnej teorii kodowania można dowiedzieć się z książki R. Hilla *A first course in coding theory*, cytowanej w spisie literatury. W kręgu naszego zainteresowania są tylko te kody, które można wyznaczyć z konfiguracji symetrycznych. Widzieliśmy w drugim wniosku na stronie 211, że każde dwa wiersze w macierzy incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) różnią się na dokładnie $2(k - \lambda)$ miejscach. Następujący rezultat wynika więc natychmiast.

Twierdzenie: Jeżeli słowa kodowe jakiegoś kodu są wierszami macierzy incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, k, λ) , to kod ten może:

- (i) wykryć błędy, jeżeli w każdym słowie popełniono mniej niż $2(k - \lambda)$ błędów;

- (ii) korygować błędy, jeżeli w każdym słowie popełniono mniej niż $k - \lambda$ błędów. $\square$

Kody otrzymane z konfiguracji w taki właśnie sposób mają dwie charakterystyczne własności: po pierwsze każde ze słów ma taką samą „wagę” (tj. zawiera tę samą liczbę jedynek), a po drugie każde dwa słowa kodowe różnią się na dokładnie takiej samej liczbie miejsc. Spośród kodów o tych charakterystycznych własnościach, te które powstają z konfiguracji są najlepsze z możliwych, gdyż, jak zobaczymy w zadaniach, każdy taki kod o długości v może mieć najwyżej v słów kodowych. W ten sposób macierz wymiaru $b \times v$, której wierszami są słowa kodowe takiego kodu, muszą spełniać warunek $b \leq v$, na podstawie nierówności Fishera, macierz incydencji wymiaru $b \times v$ konfiguracji musi mieć $b \geq v$. Jak właśnie widzieliśmy, macierze konfiguracji o minimalnej liczbie bloków okazują się być macierzami tych specjalnych kodów o maksymalnej liczbie słów kodowych. Tak więc te dwie koncepcje dały nam razem kolejne twierdzenie minimaksowe. Czytelnik, który chciałby poznać wiele fascynujących wzajemnych powiązań między konfiguracjami a kodami, może sięgnąć do książki P.J. Camerona i J.H. Van Linta *Graph theory, coding theory and block designs*.

Kody długości v otrzymane z konfiguracji (tak jak powyżej) mają v słów kodowych: zakończymy ten rozdział przykładem pokazującym, jak w pewnych przypadkach jest możliwe wyznaczenie kodu długości $v + 1$ mającego $2(v + 1)$ słów kodowych i jednocześnie mającego zdolności korygowania błędów.

Przykład: Macierz M jest macierzą incydencji pewnej konfiguracji o parametrach $(7, 7, 3, 3, 1)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jak można było oczekiwać, każde dwa wiersze macierzy M różnią się na dokładnie czterech miejscach. Gdy więc wiersze macierzy M są użyte jako słowa kodowe pewnego kodu, to może on wykrywać błędy, jeżeli w słowie popełniono mniej niż cztery błędy, i może korygować błędy, jeżeli popełniono mniej niż dwa.

Teraz niech M' będzie macierzą wymiaru 7×7 otrzymaną z M , zastępując jedynki zerami, a zera jedynkami, i niech N będzie macierzą wymiaru 16×8 utworzoną w następujący sposób:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{M} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{M'} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wówczas, jak można od razu sprawdzić, każde dwa wiersze macierzy N różnią się na czterech lub więcej miejscach. Tak więc, jeżeli wiersze macierzy N są użyte jako słowa kodowe jakiegoś kodu, to ma on takie same możliwości korygowania błędów jak poprzednio. Jednakże zwiększając jego długość o 1, mogliśmy zwiększyć ponaddwukrotnie liczbę słów kodowych. $\square$

W zadaniach zobaczymy, że jedynymi symetrycznymi konfiguracjami mogącymi tworzyć rozszerzone kody, tak jak w tym przykładzie, są konfiguracje o parametrach $(4n - 1, 4n - 1, 2n - 1, 2n - 1, n - 1)$, tak jak konfiguracja cykliczna skonstruowana wcześniej.

ZADANIA

1. Dla danych liczb całkowitych k oraz v , gdzie $1 < k < v$, pokazać, że istnieje konfiguracja o parametrach

$$\left(v, \binom{v}{k}, \binom{v-1}{k-1}, k, \binom{v-2}{k-2}\right)$$

2. Mając daną konfigurację o parametrach (v, b, r, k, λ) pokazać, że istnieje konfiguracja o parametrach $(v, b, b - r, v - k, b + \lambda - 2r)$. [W]

3. Mając daną konfigurację o parametrach (v, b, r, k, λ) i określony jej blok B , niech x_i dla $0 \leq i \leq k$ oznacza liczbę innych bloków, które mają z B dokładnie i wspólnych punktów. Pokazać, że

$$(i) \sum_{i=0}^k x_i = b - 1$$

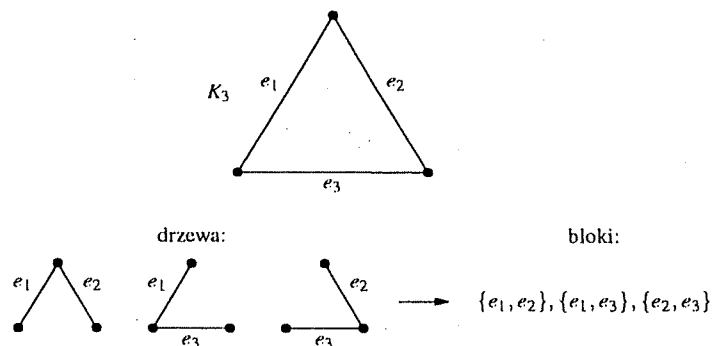
$$(ii) \sum_{i=0}^k ix_i = k(r-1) \quad [W]$$

$$(ii) \sum_{i=0}^k i(i-1)x_i = k(k-1)(\lambda-1) \quad [W]$$

4. Pokazać, że jeżeli istnieje konfiguracja o parametrach (v, v, k, k, λ) , to liczba $k + \lambda(v-1)$ jest kwadratem pewnej liczby. Wywnioskować, że jeżeli v jest parzyste, to $k - \lambda$ jest również kwadratem pewnej liczby. [W]

5. Pokazać, że jeżeli n jest albo liczbą pierwszą, albo potęgą liczby pierwszej, to istnieje konfiguracja o parametrach $(n^2, n^2 + n, n + 1, n, 1)$. [W]

6. Pewien matematyk twierdzi, że jest w stanie zastosować drzewa do konstrukcji konfiguracji. Dla liczby całkowitej $n > 2$ bierze on graf pełny K_n (na zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E) i wykorzystuje jego krawędzie jako punkty konfiguracji. Jako bloki przyjmuje on każdy podzbiór zbioru E , który tworzy drzewo na zbiorze wierzchołków V . Na przykład dla $n = 3$:



(otrzymując konfigurację o parametrach $(3, 3, 2, 2, 1)$). Pokazać, że jeżeli $n > 3$, to takie postępowanie nie da w efekcie konfiguracji. [W]

7. (Problem Kirkmana o uczniach, 1850 r.) Czy jest możliwe, by 15 uczniów maszerowało w kolumnie złożonej z pięciu szeregów, po trzy uczennice w szeregu, każdego dnia tygodnia w ten sposób, że po tygodniu każda uczennica była w tym samym szeregu z każdą z pozostałych dziewcząt dokładnie raz? [O]

8. System trójek Steiner jest to rodzina złożona z b trzelementowych podzbiorów zbioru v -elementowego, taka że każda para spośród v elementów należy do dokładnie jednej trójki. Pokazać, że w takiej konfiguracji:

(i) v jest liczbą nieparzystą,

$$(ii) b = \frac{1}{6}v(v-1),$$

(iii) v ma postać $6n+1$ lub $6n+3$, dla pewnego $n \geq 0$.

(W rzeczywistości wiadomo, że systemy trójek Steiner istnieją dla wszystkich v spełniających (iii)).

9. Pokazać, że jeżeli $B \subseteq \{0, 1, \dots, v-1\}$ jest doskonałym zbiorem różnicowym (mod v), gdzie $|B| = k$, to liczba $k(k-1)$ jest podzielna przez $v-1$.

W twierdzeniu na stronie 207 skonstruowaliśmy taki zbiór dla $k = \frac{1}{2}(v-1)$. Pokazać, że jeżeli taki zbiór istnieje, to $v = 4n+1$, dla pewnej liczby całkowitej n .

10. (Zadanie dla wytrwałych — udowodnić, że nie istnieje żadna konfiguracja o parametrach $(43, 43, 7, 7, 1)$ lub równoważnie, że nie istnieje skończona płaszczyzna rzutowa rzędu 6).

(i) Niech Q będzie macierzą kwadratową. Pokazać, że istnieje macierz diagonalna D , w której wszystkie wyrazy leżące na przekątnej są równe ± 1 , taka że macierz $Q + D$ ma niezerowy wyznacznik. [W]

(ii) Niech P będzie macierzą wymiaru 44×44 o wyrazach będących liczbami wymiernymi. Pokazać, że istnieją liczby wymierne $x_1, \dots, x_{43}$, dla których

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{43} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{43} \\ y \end{pmatrix}$$

gdzie $y_1 = \pm x_1, \dots, y_{43} = \pm x_{43}$

[W]

(iii) Rozważając macierz wymiaru 4×4

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

dla której $K^T K = 6I_4$, wyznaczyć macierz L wymiaru 44×44 , spełniającą zależność $L^T L = 6I_{44}$ (gdzie I_n oznacza macierz identycznościową wymiaru $n \times n$). [O]

(iv) Pokazać, że nie istnieją liczby wymierne x, y , dla których $6y^2 = x^2 + 1$. [W]

(v) Jesteśmy już gotowi pokazać, że nie istnieje konfiguracja o parametrach $(43, 43, 7, 7, 1)$. Załóżmy, że taka konfiguracja istnieje, niech M będzie jej

macierzą incydencji i niech N będzie macierzą wymiaru 44×44

$$N = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & M & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Niech $P = \frac{1}{6}LN^T$, gdzie L jest tą samą macierzą jak w powyższym punkcie (iii). Wówczas stosując punkt (ii) do macierzy P , wyznaczyć liczby wymierne $x_1, \dots, x_{43}$ oraz y (określone w tamtym punkcie) i niech $x = x_1 + \dots + x_{43}$. Pokazać, że x oraz y spełniają zależność $6y^2 = x^2 + 1$ oraz wywnioskować żadaną sprzeczność. [W]

11. Załóżmy, że przy wyposażeniu, jakim dysponujemy, podczas transmisji kodu binarnego może wystąpić błąd na dowolnym ustalonym miejscu, niezależnie od innych miejsc, z prawdopodobieństwem p . W przykładzie o kierunkach świata w tym rozdziale mieliśmy dwa kody korygujące błędy. Pierwszy był długości 3 i mógł wykryć jeden błąd w słowie kodowym, a drugi był długości 6 i mógł wykryć do trzech błędów w słowie kodowym. Wyliczyć, w zależności od p ,

(i) prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednego błędu w transmitowanym słowie kodującym, używającym pierwszego kodu; [O]

(ii) prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż trzech błędów w transmitowanym słowie kodującym, używającym drugiego kodu. [O]

Wyliczyć te prawdopodobieństwa w przypadkach, gdy $p = 0,75$, $p = 0,3$ oraz $p = 0,1$. Zobaczyć, że dla małych wartości p , drugi kod jest o wiele bardziej niezawodny. [O]

12. Rozważmy rodzinę v podzbiorów zbioru b -elementowego, taką że każdy z podzbiorów zawiera r elementów, a przekrój każdych dwóch spośród tych zbiorów zawiera λ elementów. Zliczając wystąpienia elementów w tych parach zbiorów lub stosując inne podejście, pokazać, że

$$b((v-1)\lambda + r) \geq vr^2$$

Pokazać również, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy każdy spośród b elementów należy do tej samej liczby podzbiorów, powiedzmy k , gdzie

$$r = \frac{bk}{v} = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} \quad [W]$$

13. Załóżmy, że mamy kod o długości v , składający się z b słów kodowych, każde o tej samej wadze (tj. każde składające się z tej samej liczby jedynek)

i takich, że każde dwa słowa kodowe różnią się na tej samej liczbie miejsc. Pokazać, że $b \leq v$. [W]

14. Niech H będzie macierzą wymiaru $m \times m$, w której każdy wyraz jest równy ± 1 , przy czym pierwszy wiersz oraz kolumna składają się wyłącznie z 1, a ponadto $HH^T = mI_m$, gdzie $m > 2$ oraz I_m jest macierzą identycznościową wymiaru $m \times m$. (Taka macierz H jest znana jako *znormalizowana macierz Hadamarda*). Pokazać, że

(i) każdy wiersz i każda kolumna w macierzy H (z wyjątkiem pierwszych) zawiera dokładnie $m/2$ jedynek; [W]

(ii) dowolne dwie kolumny macierzy H (z wyjątkiem pierwszej) mają łącznie jedynek na dokładnie $m/4$ miejscach. [W]

Niech teraz $m = 4n$ i niech M będzie macierzą otrzymaną z H po usunięciu jej pierwszego wiersza oraz pierwszej kolumny i zamianie wszystkich jej wyrazów równych -1 przez zero. Pokazać, że M jest macierzą incydencji dla konfiguracji o parametrach $(4n-1, 4n-1, 2n-1, n-1)$.

15. Niech M będzie macierzą incydencji dla konfiguracji o parametrach (v, v, k, λ) . Wówczas, jak już widzieliśmy, dowolne dwa wiersze macierzy M różnią się na $2(k-\lambda)$ miejscach i mogą być one użyte jako słowa kodowe w kodzie korygującym błędy. Teraz, tak jak w ostatnim przykładzie tego rozdziału, niech M' będzie macierzą otrzymaną z M przez zastąpienie jedynek zerami, a zer jedynekami, i niech N będzie macierzą wymiaru $2(v+1) \times (v+1)$ postaci

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & & \\ 1 & & M & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & M' & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Pokazać, że każde dwa wiersze macierzy N różnią się na co najmniej $2(k-\lambda)$ miejscach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \leq 2\lambda + 1$ oraz $v \geq 3k - 2\lambda$. [W]

(ii) Wykorzystując podstawowe zależności pomiędzy parametrami, pokazać, że dwie nierówności z (i) zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 2\lambda + 1$ oraz $v = 4\lambda + 3$. [W]

(iii) Używając wierszy macierzy N jako słów kodowych jakiegoś kodu, pokazać, że będzie on miał takie same możliwości wykrywania błędów, jak kod używający macierzy M , wtedy i tylko wtedy, gdy wyjściowa konfiguracja ma parametry $(4n - 1, 4n - 1, 2n - 1, 2n - 1, n - 1)$.

16

Teoria Ramseya

Zanim przejdziemy do rozważań ogólnych, dotyczących „teorii Ramseya”, podamy (bez dowodu) trzy przykłady: pierwszy z nich jest banalny, pozostałe dwa natomiast (nawet dla takich małych liczb) nie należą do najprostszych.

Przykłady: (i) Jeżeli każdy jednoelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ zostanie pokolorowany na czerwono lub zielono, to (niezależnie od kolorowania) będzie istniał czteroelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, którego wszystkie jednoelementowe podzbiory będą miały ten sam kolor.

(ii) Jeżeli każdy dwuelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, 18\}$ zostanie pokolorowany na czerwono lub zielono, to (niezależnie od kolorowania) będzie istniał czteroelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, 18\}$, którego wszystkie dwuelementowe podzbiory będą miały ten sam kolor.

(iii) Jeżeli każdy trzelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, 21\}$ zostanie pokolorowany na czerwono lub zielono, to (niezależnie od kolorowania) będzie istniał czteroelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, 21\}$, którego wszystkie trzelementowe podzbiory będą miały ten sam kolor. $\square$

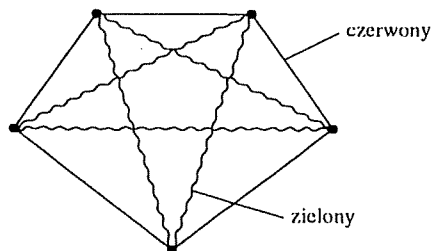
W ogólnym przypadku niech c będzie dodatnią liczbą całkowitą (w powyższych przykładach jest nią liczba cztery) i niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą mniejszą od c (w przykładach, w kolejności, jeden, dwa i trzy). Wówczas okazuje się, że istnieje dodatnia liczba całkowita R (powyżej 7, 18 lub 21) taka, że jeżeli wszystkie k -elementowe podzbiory zbioru $\{1, \dots, R\}$ zostaną pokolorowane na czerwono lub zielono, to będzie istniał c -elementowy podzbiór zbioru $\{1, \dots, R\}$, którego wszystkie k -elementowe podzbiory będą tego samego koloru. Jest to szczególna, dwukolorowa wersja „twierdzenia Ramseya”, udowodnionego po raz pierwszy (dla dowolnej liczby kolorów) przez F.P. Ramseya w 1930r. W każdym przypadku najmniejsza możliwa liczba R nazywa się „liczbą Ramseya”. Okazuje się, że nawet dla tak bardzo szczególnej wersji wynik ten jest trudny do zaakceptowania, niewiele bowiem wiadomo o konkretnych wartościach liczb Ramseya.

Rozpocznijmy od dokładniejszego rozważenia przypadków $k = 1$ i $k = 2$, tak jak w pierwszych dwóch powyższych przykładach. Przypadek $k = 1$ jest prostym uogólnieniem zasady szufladkowej. Na przykład w punkcie (i) stwierdzamy po prostu, że jeżeli umieścimy liczby od 1 do 7 w dwóch szufladkach („czerwonej” i „zielonej”), to jedna z tych szufladek musi zawierać co najmniej cztery liczby. Przypadek $k = 2$ dotyczy kolorowania dwuelementowych podzbiorów i może być interpretowany jak kolorowanie krawędzi grafu. Dla przykładu kolorowanie wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, 18\}$ to nic innego jak kolorowanie wszystkich krawędzi grafu pełnego na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, 18\}$. W takim razie, na podstawie punktu (ii) stwierdzamy, że jeżeli krawędzie grafu K_{18} zostaną pokolorowane na czerwono lub zielono, to będzie istniał podgraf K_4 , którego wszystkie krawędzie będą tego samego koloru. W ten sposób twierdzenie Ramseya w przypadku $k = 2$ może być traktowane jako kombinatoryczny aspekt teorii grafów.

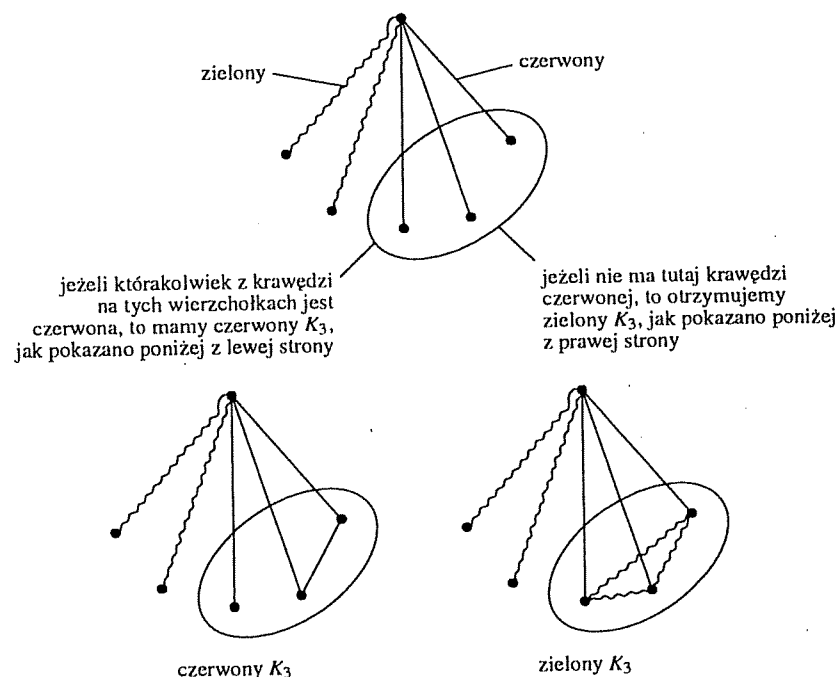
W pierwszej części tego rozdziału będziemy rozważać właśnie taką teoriografową wersję twierdzenia Ramseya i wyprowadzimy z niej kilka innych znakomitych, pokrewnych twierdzeń. W dalszej części omówimy szersze aspekty „teorii Ramseya”, których konsekwencją będą pewne zaskakujące rezultaty, podane na końcu tej książki.

Przykład: Pokazać, że można pokolorować krawędzie grafu K_5 na czerwono lub zielono, nie otrzymując jednokolorowego podgrafu K_3 . Pokazać jednakże, iż kolorując krawędzie grafu K_6 na czerwono lub zielono, zawsze otrzymamy podgraf K_3 o wszystkich krawędziach tego samego koloru.

Rozwiązanie: Bardzo łatwo można pokolorować krawędzie grafu K_5 na czerwono lub na zielono, unikając powstania K_3 o tym samym kolorze:



Wyobraźmy sobie teraz, że każda z krawędzi grafu K_6 została pokolorowana na czerwono lub zielono i weźmy pod uwagę dowolny wierzchołek tego grafu. Wierzchołek ten jest końcem pięciu krawędzi, z których każda jest czerwona lub zielona, a więc co najmniej trzy spośród nich są tego samego koloru. Przyjmijmy, nie tracąc na ogólności, że co najmniej trzy spośród nich są czerwone i rozważmy trzy wierzchołki będące drugimi końcami tych czerwonych krawędzi:



Ten przykład pokazuje, że $n = 6$ jest najmniejszą liczbą o takiej własności, że jeżeli krawędzie grafu K_n są pokolorowane na czerwono lub zielono, to istnieje podgraf K_3 czerwony lub zielony. Uogólnimy teraz ten fakt na większe liczby. Dla przykładu, ile wierzchołków musi mieć graf pełny, by spełniał własność taką, że jeżeli pokolorujemy jego krawędzie na czerwono lub zielono, to będzie istniał jednokolorowy podgraf K_{10} ? Wcale nie jest oczywiste, że taki graf musi istnieć. Można by bowiem kolorować krawędzie dowolnie dużych grafów pełnych na czerwono lub zielono, unikając jednocześnie powstania podgrafu K_{10} koloru, na przykład, zielonego. Jednakże następny rezultat pokazuje w szczególności, że jeżeli graf K_{48620} ma krawędzie pokolorowane na czerwono lub zielono, to istnieje w nim podgraf K_{10} o krawędziach jednakowego koloru!

Twierdzenie: Niech $r, g \geq 2$ będą liczbami całkowitymi i niech $n = \binom{r+g-2}{r-1}$. Wówczas, jeżeli krawędzie grafu K_n są pokolorowane na czerwono lub zielono, to istnieje czerwony podgraf K_r albo zielony podgraf K_g .

Dowód: Przeprowadzimy go przez indukcję względem $r + g$, przy czym najmniejszy z możliwych przypadków zachodzi wtedy, kiedy $r = g = 2$. Jeżeli albo $r = 2$ albo $g = 2$, to wynik ten jest banalny. Na przykład, gdy $r = 2$, wówczas $n = \binom{2+g-2}{2-1} = g$ i jest oczywiste, że kolorując krawędzie grafu K_g na czerwono lub zielono, będzie istniała albo krawędź czerwona (co daje nam czerwony K_2)

albo, w przeciwnym razie, wszystkie krawędzie będą zielone, a więc będziemy mieli zielony K_g .

Założmy zatem, że $r > 2$, $g > 2$ i że wynik jest prawdziwy dla wartości mniejszych od $r + g$. Wówczas, w szczególności:

- (i) jeżeli $n_1 = \binom{r+(g-1)-2}{r-1}$ oraz krawędzie grafu K_{n_1} są pokolorowane na czerwono lub zielono, to istnieje czerwony podgraf K_r albo zielony podgraf K_{g-1} ;
- (ii) jeżeli $n_2 = \binom{(r-1)+g-2}{(r-1)-1}$ oraz krawędzie grafu K_{n_2} są pokolorowane na czerwono lub zielono, to istnieje czerwony podgraf K_{r-1} albo zielony podgraf K_g .

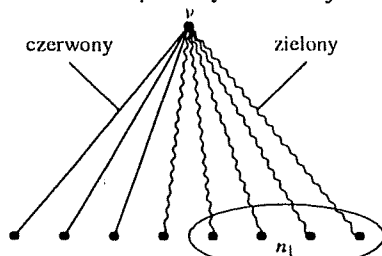
Aby otrzymać teraz żądany wynik dla r oraz g , niech $n = \binom{r+g-2}{r-1}$ i założmy, że krawędzie grafu K_n zostały pokolorowane na czerwono lub zielono. Weźmy pod uwagę jeden konkretny wierzchołek v i rozważmy dochodzące do niego krawędzie: jest ich $n - 1$ i na podstawie zwykłej zależności rekurencyjnej dla współczynników dwumianowych mamy

$$\begin{aligned} n - 1 &= \binom{r+g-2}{r-1} - 1 = \binom{r+g-3}{r-1} + \binom{r+g-3}{r-2} - 1 \\ &> \underbrace{\binom{r+(g-1)-2}{r-1} - 1}_{n_1-1} + \underbrace{\binom{(r-1)+g-2}{(r-1)-1} - 1}_{n_2-1} \end{aligned}$$

W ten sposób wśród $n - 1$ krawędzi mających wierzchołek końcowy v , nie może być mniej niż n_1 krawędzi zielonych oraz mniej niż n_2 krawędzi czerwonych, zatem:

albo wśród tych $n - 1$ krawędzi jest co najmniej n_1 krawędzi zielonych

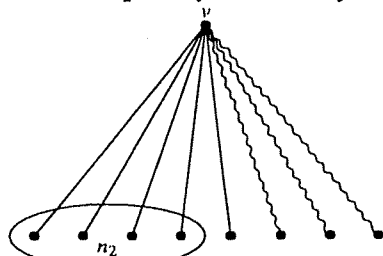
W tym przypadku rozważmy graf pełny K_{n_1} , utworzony na n_1 wierzchołkach, będących drugimi końcami n_1 krawędzi zielonych:



Na mocy (i) istnieje tutaj czerwony K_r lub zielony K_{g-1}

albo wśród tych $n - 1$ krawędzi jest co najmniej n_2 krawędzi czerwonych

W tym przypadku rozważmy graf pełny K_{n_2} , utworzony na n_2 wierzchołkach będących drugimi końcami n_2 krawędzi czerwonych:



Na mocy (ii) istnieje tutaj czerwony K_{r-1} lub zielony K_g

Istnieje pełna symetria między tymi dwoma przypadkami; rozważmy więc, na przykład, sytuację przedstawioną po lewej stronie. Jeżeli istnieje czerwony K_r , to znaleźliśmy to, czego szukaliśmy, i twierdzenie jest udowodnione. Jeżeli natomiast w przedstawionym podgrafie istnieje zielony K_{g-1} , to wraz z wierzchołkiem v daje on zielony K_g , tak jak żądaliśmy.

Sytuacja przedstawiona po prawej stronie jest podobna, a więc w każdym przypadku musi istnieć w pokolorowanym grafie K_n czerwony podgraf K_r lub zielony podgraf K_g i, na mocy indukcji, dowód jest zakończony. $\square$

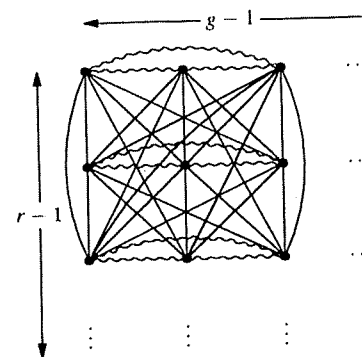
Niech $r, g \geq 2$. Poprzednie twierdzenie pokazuje istnienie liczby całkowitej n takiej, że jeżeli krawędzie grafu K_n są pokolorowane na czerwono lub zielono, to musi istnieć czerwony podgraf K_r lub zielony podgraf K_g ; możemy więc już zdefiniować *liczbę Ramseya* $R(r, g)$ jako najmniejszą liczbę całkowitą n , mającą tę własność. Ponieważ nazwy kolorów nie mają żadnego znaczenia, więc widzimy, że $R(r, g) = R(g, r)$. Nasz kolejny rezultat pokazuje pewne proste oszacowania dla liczb Ramseya.

Twierdzenie: Dla $r, g \geq 2$ liczba Ramseya $R(r, g)$ spełnia nierówność

$$(r-1)(g-1) + 1 \leq R(r, g) \leq \binom{r+g-2}{r-1}$$

Dowód: Nierówność z prawej strony jest bezpośrednią konsekwencją poprzedniego twierdzenia. Rzeczywiście, na podstawie definicji, $R(r, g)$ jest *najmniejszą* liczbą całkowitą n o przedstawionej własności kolorowania i na mocy tego twierdzenia $n = \binom{r+g-2}{r-1}$ ma oczywiście tę własność.

Aby udowodnić nierówność z lewej strony, musimy przedstawić takie kolorowanie na czerwono lub zielono krawędzi grafu $K_{(r-1)(g-1)}$, w wyniku którego nie powstanie ani czerwony podgraf K_r , ani zielony podgraf K_g . W tym celu narysujmy $(r-1)(g-1)$ wierzchołków w postaci prostokątnej kraty wymiaru $(r-1) \times (g-1)$. Następnie każde dwa wierzchołki z tego samego wiersza połączmy krawędzią zieloną, a każde dwa wierzchołki należące do różnych wierszy krawędzią czerwoną:



Wówczas zielone krawędzie tworzą graf, składający się z $r - 1$ składowych, z których każda jest grafem pełnym na $g - 1$ wierzchołkach. Jest więc oczywiste, że graf ten nie zawiera podgrafu K_g (w rzeczywistości nie istnieje żaden spójny zielony podgraf na g lub więcej wierzchołkach).

Łatwo można się również przekonać, że przy takim kolorowaniu nie powstanie czerwony podgraf K_r . Faktycznie, spójrzmy na którekolwiek r wierzchołków. Znajdują się one wśród $r - 1$ wierszy, czyli, na podstawie zasady szufladkowej, jeden z wierszy musi zawierać co najmniej dwa spośród tych wierzchołków. Ale wówczas te dwa wierzchołki są połączone krawędzią zieloną, tak więc nie mogą być one częścią czerwonego podgrafu K_r .

Wynika stąd, że pokolorowaliśmy krawędzie grafu $K_{(r-1)(g-1)}$ na czerwono lub zielono, unikając jednocześnie powstania czerwonego podgrafu K_r i zielonego podgrafu K_g . To implikuje, że $R(r, g) > (r - 1)(g - 1)$, kończąc dowód. $\square$

Jakie są konkretne wartości liczb Ramseya? Łatwo można zauważyć, że $R(2, g) = g$, dla każdego $g \geq 2$: jak bowiem już uzasadnialiśmy, jeżeli K_g ma krawędzie pokolorowane na czerwono lub zielono, to albo będzie istniała krawędź czerwona, albo, w przeciwnym razie, cały graf K_g będzie zielony. (Zauważmy, że przypadki $r = 2$ i $g = 2$ są jedynymi, dla których oba oszacowania z poprzedniego twierdzenia w rzeczywistości pokrywają się, dając równość.) Przykład na stronie 224 pokazuje, że $R(3, 3) = 6$; w zadaniach zobaczymy, że $R(3, 4) (= R(4, 3)) = 9$; wiadomo również, że $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$ i $R(3, 7) = 23$. Ponadto, co wynika z punktu (ii) pierwszego przykładu tego rozdziału, $R(4, 4) = 18$. Okazuje się, że oprócz tych wartości nie są znane żadne inne wartości liczb Ramseya¹.

Nietrudno jest uogólnić rozważania dotyczące dwóch kolorów, na przypadek m kolorów. Podamy teraz jeden z takich rezultatów:

Twierdzenie: Niech m będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas istnieje liczba całkowita M taka, że jeżeli każda krawędź grafu K_M jest pokolorowana jednym z m kolorów, to istnieje jednokolorowy K_3 .

(Zobaczmy w zadaniach, że liczba $M = \lfloor m!e \rfloor + 1$ spełnia to twierdzenie).

Dowód: Zastosujemy metodę indukcji względem m : przypadek $m = 1$ jest oczywisty, a przypadek $m = 2$ jest częścią teorii Ramseya, omawianą wcześniej (widzieliśmy, że kolorując K_6 za pomocą dwóch kolorów otrzymamy jednokolorowy K_3).

Załóżmy więc, że $m > 2$ i że wynik jest prawdziwy w przypadku $m - 1$ kolorów. Wówczas, na mocy założenia indukcyjnego, istnieje liczba M_0 taka, że jeżeli krawędzie grafu K_{M_0} są pokolorowane $m - 1$ kolorami, to istnieje jednokolorowy podgraf K_3 . Niech M oznacza liczbę Ramseya $R(3, M_0)$. Aby udowodnić, iż M jest żądaną w twierdzeniu liczbą, założymy, że krawędzie grafu K_M są pokolorowane za pomocą m kolorów, i pokażemy istnienie jednokolorowego K_3 .

¹Niedawno B. McKay i S. Radziszewski, nakładem wielu godzin pracy komputera, wykazali, że $R(4, 5) = 25$ (przyp. tłum.).

Niech jednym z kolorów będzie czerwony i przez moment określmy wszystkie pozostałe $m - 1$ kolorów jako nieczerwone. Wówczas mając na uwadze to, że liczba M została wybrana jako liczba Ramseya $R(3, M_0)$, będzie istniał albo czerwony K_3 , albo nieczerwony K_{M_0} . Jeżeli rzeczywiście istnieje czerwony podgraf K_3 , to mamy koniec dowodu. Jeżeli natomiast istnieje nieczerwony K_{M_0} , to jego krawędzie są pokolorowane $m - 1$ kolorami. Tak więc, ze względu na sposób wyboru liczby M_0 , graf K_{M_0} (a więc również wyjściowy graf K_M) będzie zawierał K_3 o krawędziach jednakowego koloru. To na mocy indukcji kończy dowód. $\square$

Ponieważ $R(3, 3) = 6$ i $R(3, R(3, 3)) = R(3, 6) = 18$, zatem konsekwencją tego dowodu jest fakt, że jeżeli krawędzie grafu K_{18} zostaną pokolorowane trzema kolorami, to będzie istniał jednokolorowy podgraf K_3 . W rzeczywistości zobaczymy w zadaniach, że to samo jest prawdą dla K_{17} (ale nie zachodzi już dla K_{16}). Zainteresowany czytelnik będzie mógł również się dowiedzieć, jak moglibyśmy zdefiniować liczbę Ramseya $R(r_1, \dots, r_m)$; powyższy przykład jest ilustracją tego, że $R(3, 3, 3) = 17$.

Odmiennym kierunkiem badań w teorii Ramseya jest szukanie, w odpowiednio dużych grafach pełnych, zamiast czerwonego K_r i zielonego K_g , pewnych innych określonych czerwonych i zielonych podgrafów. Podamy teraz jeden ciekawy rezultat tego typu, w którym, ku zaskoczeniu, można precyzyjnie określić konieczną liczbę wierzchołków grafu pełnego.

Twierdzenie: Niech $r, g \geq 2$ będą liczbami całkowitymi i założmy, że dane jest konkretne drzewo T na g wierzchołkach. Wówczas, jeżeli każda krawędź grafu pełnego $K_{(r-1)(g-1)+1}$ jest pokolorowana na czerwono lub zielono, to istnieje graf pełny K_r o barwie czerwonej lub drzewo T o barwie zielonej.

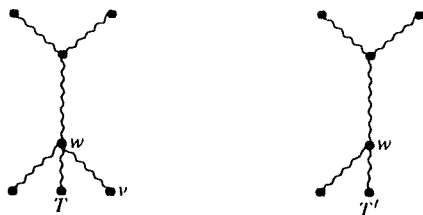
Ponadto $(r - 1)(g - 1) + 1$ jest najmniejszą liczbą o tej własności.

Dowód: Najpierw zauważmy, że $(r - 1)(g - 1) + 1$ jest rzeczywiście najmniejszą taką liczbą. Jak już bowiem widzieliśmy, w wyniku kolorowania krawędzi grafu $K_{(r-1)(g-1)}$ przedstawionego na stronie 227 nie otrzymamy ani czerwonego podgrafu K_r , ani zielonego spójnego podgrafu na g wierzchołkach (a więc również zielonego drzewa T).

Dowód tego, że $(r - 1)(g - 1) + 1$ jest właściwą liczbą, przeprowadzimy przez indukcję względem $r + g$, przy czym najmniejszy możliwy przypadek ma miejsce, gdy $r = g = 2$. Jeżeli albo $r = 2$, albo $g = 2$, to rezultat jest oczywisty. Dla przykładu, jeżeli $r = 2$, to $n = (2 - 1)(g - 1) + 1 = g$ i, tak jak poprzednio, jest jasne, że jeżeli krawędzie grafu K_g są pokolorowane na czerwono lub zielono, to będzie istniał albo czerwony K_2 , albo zielony K_g (który musi zawierać zielone drzewo T).

Założmy więc, że $r > 2$, $g > 2$ i że wynik jest prawdziwy dla wartości mniejszych od $r + g$. Zanim będziemy kontynuować dowód, narysujmy drzewo T , które mamy nadzieję znaleźć jako drzewo zielone. Ma ono g wierzchołków, a wśród nich musi być wierzchołek v stopnia 1 i krawędź, powiedzmy, vw . Niech T' będzie drzewem otrzymanym z T przez usunięcie wierzchołka v oraz krawędzi vw :

np.



Na mocy założenia indukcyjnego twierdzenie jest prawdziwe dla każdej wartości mniejszej od $r+g$. W szczególności, biorąc pod uwagę graf K_r i drzewo T' na $g-1$ wierzchołkach, wiemy, że

(i) jeżeli $n_1 = (r-1)((g-1)-1) + 1$ oraz krawędzie grafu K_{n_1} (lub jakiegokolwiek większego grafu pełnego) zostaną pokolorowane na czerwono lub zielono, to będzie istniał czerwony K_r lub zielony T' .

Podobnie, stosując założenie indukcyjne do K_{r-1} i zadanego drzewa T na g wierzchołkach, wiemy, że

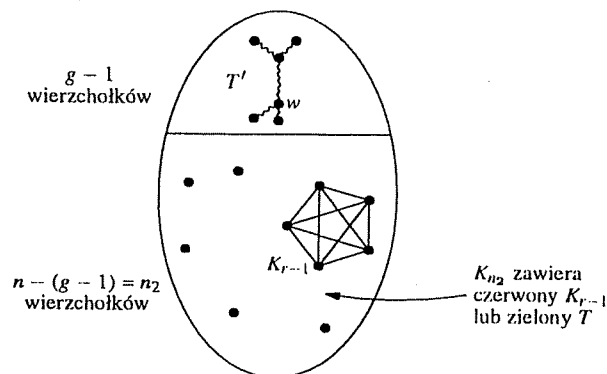
(ii) jeżeli $n_2 = ((r-1)-1)(g-1) + 1$ oraz krawędzie grafu K_{n_2} zostaną pokolorowane na czerwono lub zielono, to będzie istniał czerwony K_{r-1} lub zielony T .

Przyjmijmy teraz, że $n = (r-1)(g-1) + 1$ i spróbujmy wywnioskować rezultat dla podgrafów K_r oraz T zawartych w K_n . Zauważmy najpierw, że oczywiście $n > n_1$ i że

$$n - (g-1) = ((r-1)(g-1) + 1) - (g-1) = (r-2)(g-1) + 1 = n_2$$

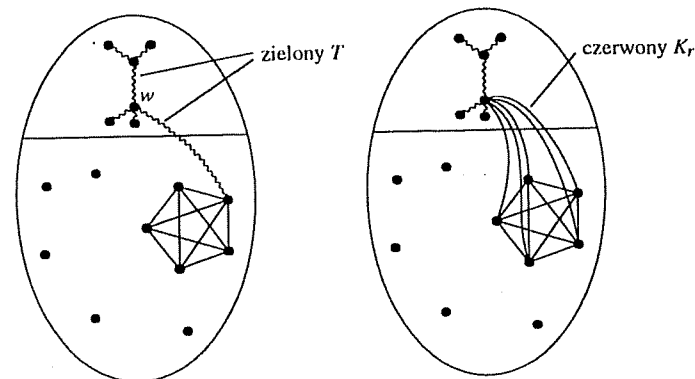
Założmy więc, że każda krawędź grafu K_n jest pokolorowana na czerwono lub zielono: naszym celem jest pokazanie, że musi istnieć czerwony podgraf K_r lub zielony podgraf T .

Ponieważ $n > n_1$, zatem z punktu (i) wynika, że pokolorowany graf będzie zawierał albo czerwony K_r (co kończy już dowód), albo zielony T' . Założmy więc, że zachodzi druga sytuacja i odnajdźmy jedną taką kopię grafu T' (na $g-1$ wierzchołkach): następnie spójrzmy na pozostałe $n - (g-1) (= n_2)$ wierzchołki.



Na podstawie punktu (ii) ten niższy graf pełny na n_2 wierzchołkach zawiera czerwony K_{r-1} lub zielony T . Jeżeli zawiera zielony T , to mamy koniec dowodu. Założmy więc, że zawiera on czerwony K_{r-1} , tak jak to zostało pokazane.

Weźmy teraz pod uwagę krawędzie łączące w z $r-1$ wierzchołkami czerwonego grafu K_{r-1} . Jeżeli którakolwiek z nich jest zielona (jak pokazano poniżej z lewej strony), to znaleźliśmy zieloną kopię drzewa T . Jeżeli ta sytuacja nie zachodzi, to te wszystkie $r-1$ krawędzie są czerwone, a więc znaleźliśmy czerwony K_r (jak pokazano na rysunku z prawej strony).



Wywnioskowaliśmy więc nasz rezultat dla r oraz g , czyli na mocy indukcji dowód jest zakończony. $\square$

Z definicji nasze grafy są zawsze grafami skończonymi. Chcąc więc sformułować nieskończoną wersję twierdzenia Ramseya, powrócimy do jego teoriomnogościowej postaci. (Jeżeli jednak czytelnik chciałby uogólnić pojęcie grafu na graf określony na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, \dots\}$, to mógłby wówczas w dalszym ciągu traktować ten rezultat jako wynik z teorii grafów).

Twierdzenie: Niech $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ i niech każdy dwuelementowy podzbiór zbioru N będzie pokolorowany jednym spośród skończonej liczby dostępnych kolorów. Wówczas istnieje nieskończony podzbiór S zbioru N taki, że każdy dwuelementowy podzbiór zbioru S jest tego samego koloru.

Dowód: Założmy, że każdy dwuelementowy podzbiór zbioru N został pokolorowany jednym spośród skończonej liczby dostępnych kolorów: przedstawimy teraz konstrukcję żadanego zbioru S .

Aby wprowadzić indeksowanie, które będzie wykorzystywane w dalszej części, przyjmijmy $N_0 = N$ i niech n_0 będzie dowolnym ustalonym elementem w zbiorze N_0 . Rozważmy rodzinę dwuelementowych podzbiorów $\{\{n_0, n\} : n \in N_0 \setminus \{n_0\}\}$. (Na przykład, jeżeli wzięlibyśmy za n_0 liczbę 1, to zbiorem tych par byłby po prostu zbiór $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots\}$). Ta nieskończona rodzina par została pokolorowana przy użyciu tylko skończonej liczby kolorów, czyli jej pewna nieskończona podrodzina musi być tego samego koloru: założmy więc, że

wszystkie elementy nieskończonej rodziny $\{\{n_0, n\} : n \in N_1\}$ są jednokolorowe (i założmy przykładowo, że wszystkie te pary są czerwone).

Niech teraz n_1 będzie dowolnym elementem zbioru N_1 i rozważmy rodzinę dwuelementowych podzbiorów $\{\{n_1, n\} : n \in N_1 \setminus \{n_1\}\}$. Ta nieskończona rodzina par została pokolorowana przy użyciu tylko skończonej liczby kolorów, czyli jej pewna nieskończona podrodzina musi być jednokolorowa: założmy więc, że wszystkie elementy nieskończonej rodziny $\{\{n_1, n\} : n \in N_2\}$ są jednokolorowe (i założmy przykładowo, że wszystkie te pary są zielone).

Niech teraz n_2 będzie dowolnym elementem zbioru N_2 i rozważmy rodzinę dwuelementowych podzbiorów $\{\{n_2, n\} : n \in N_2 \setminus \{n_2\}\}$. Ponownie rodzina ta zawiera pewną jednokolorową nieskończoną podrodzinę $\{\{n_2, n\} : n \in N_3\}$ (powiedzmy, niebieską).

Niech teraz n_3 będzie dowolnym elementem zbioru N_3 i rozważmy ...

Postępując dalej w ten sposób, otrzymamy ciąg nieskończonych zbiorów

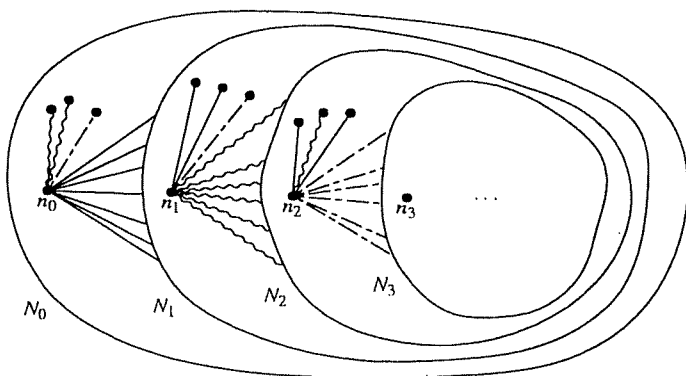
$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$$

oraz po jednym elemencie z każdego z nich

$$n_0 \in N_0, n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, n_3 \in N_3, \dots$$

przy czym, dla dowolnego ustalonego n_i , dwuelementowe zbiory $\{\{n_i, n\} : n \in N_{i+1}\}$ są tego samego koloru.

Jeżeli dopuścilibyśmy nieskończone zbiory wierzchołków, to moglibyśmy przedstawić ten proces w postaci grafu i porównać go z dowodami pewnych wcześniejszych twierdzeń:



W ten sposób (używając pewnych konkretnych kolorów) mamy nieskończoną listę:

$\{\{n_0, n\} : n \in N_1\}$ są wszystkie tego samego koloru (powiedzmy czerwonego)

$\{\{n_1, n\} : n \in N_2\}$ są wszystkie tego samego koloru (powiedzmy zielonego)

$\{\{n_2, n\} : n \in N_3\}$ są wszystkie tego samego koloru (powiedzmy niebieskiego)

$\{\{n_3, n\} : n \in N_4\}$ są wszystkie tego samego koloru (powiedzmy czerwonego)

Ponieważ dysponujemy tylko skończoną liczbą kolorów, któryś z nich (powiedzmy żółty) musi wystąpić na tej liście nieskończenie wiele razy; tj.

$\{\{n_{i_1}, n\} : n \in N_{i_1+1}\}$ są wszystkie tego samego koloru (powiedzmy żółtego)

$\{\{n_{i_2}, n\} : n \in N_{i_2+1}\}$ są wszystkie tego samego koloru (powiedzmy żółtego)

$\{\{n_{i_3}, n\} : n \in N_{i_3+1}\}$ są wszystkie tego samego koloru (powiedzmy żółtego)

Niech $S = \{n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots\}$. Wówczas S jest zbiorem nieskończonym i twierdzimy, że każdy dwuelementowy podzbiór zbioru S jest żółty. Weźmy pod uwagę typowy dwuelementowy podzbiór $\{n_{i_j}, n_{i_k}\}$, gdzie $n_{i_j} < n_{i_k}$. Wtedy

$$n_{i_k} \in N_{i_k} \subseteq N_{i_k-1} \subseteq \dots \subseteq N_{i_j+1}$$

a więc zbiór $\{n_{i_j}, n_{i_k}\}$ jest jedną z par należących do zbioru $\{\{n_{i_j}, n\} : n \in N_{i_j+1}\}$, który znajduje się na powyższej liście, a zatem jest koloru żółtego, tak jak twierdziliśmy.

W ten sposób każdy dwuelementowy podzbiór nieskończonego zbioru S jest koloru żółtego, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Rezultat ten kończy nasz przegląd teorio-grafowych aspektów twierdzenia Ramseya. Tak jak wspomnieliśmy na samym początku tego rozdziału, twierdzenie Ramseya w rzeczywistości rozciąga się na kolorowanie trzelementowych podzbiorów, a w ogólności na kolorowanie podzbiorów k -elementowych. Udowodnimy teraz trzelementową wersję tego twierdzenia i pokażemy, w jaki sposób można użyć zaprezentowanej metody do dalszych uogólnień.

Twierdzenie: Niech $r, g \geq 3$. Wówczas istnieje liczba n taka, że jeżeli każdy trzelementowy podzbiór zbioru $V = \{1, 2, \dots, n\}$ jest pokolorowany na czerwono lub zielono, to albo istnieje r -elementowy podzbiór zbioru V , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są czerwone, albo istnieje g -elementowy podzbiór zbioru V , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są zielone.

Dowód: Przeprowadzimy go przez indukcję względem $r+g$, przy czym najmniejszy przypadek zachodzi, gdy $r = g = 3$. Wynik ten jest oczywisty, gdy $r = 3$ (lub gdy $g = 3$), możemy bowiem wtedy za n przyjąć g (lub odpowiednio r). Założmy więc, że $r > 3, g > 3$ i że wynik jest prawdziwy dla wartości mniejszych od $r+g$.

Wówczas możemy zastosować założenie indukcyjne do przypadku $r - 1$ oraz g , otrzymując liczbę n_1 mającą taką własność, że

(i) jeżeli $|V_1| = n_1$ oraz każdy trzelementowy podzbiór zbioru V_1 jest pokolorowany na czerwono lub zielono, to albo istnieje $(r - 1)$ -elementowy podzbiór zbioru V_1 , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są czerwone, albo istnieje g -elementowy podzbiór zbioru V_1 , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są zielone.

Podobnie możemy zastosować założenie indukcyjne do przypadku r oraz $g - 1$, otrzymując liczbę n_2 mającą tę własność, że

(ii) jeżeli $|V_2| = n_2$ oraz każdy trzelementowy podzbiór zbioru V_2 jest pokolorowany na czerwono lub zielono, to albo istnieje r -elementowy podzbiór zbioru V_2 , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są czerwone, albo istnieje $(g - 1)$ -elementowy podzbiór zbioru V_2 , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są zielone.

Niech teraz R będzie liczbą Ramseya $R(n_1, n_2)$ i niech $n = R + 1$. Aby pokazać, że n jest żadaną w twierdzeniu liczbą, założymy, że każdy trzelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, R + 1\}$ został pokolorowany na czerwono lub zielono, i znajdziemy r -elementowy podzbiór, którego wszystkie trzelementowe podzbiory są czerwone, lub znajdziemy g -elementowy podzbiór, którego wszystkie trzelementowe podzbiory są zielone.

Weźmy pod uwagę graf pełny K_R na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, R\}$ i pokolorujmy każdą jego krawędź na czerwono lub zielono, przyjmując dla krawędzi ij ten sam kolor, który użyliśmy dla trzelementowego podzbioru $\{i, j, R + 1\}$. Wówczas, na podstawie definicji liczby Ramseya $R = R(n_1, n_2)$, albo istnieje K_{n_1} , którego wszystkie krawędzie są czerwone, albo istnieje K_{n_2} , którego wszystkie krawędzie są zielone. Założmy, dla przykładu, istnienie K_{n_2} (jako że pierwszy przypadek jest bardzo podobny).

Fakt, że istnieje graf K_{n_2} o wszystkich krawędziach zielonych (powiedzmy na zbiorze wierzchołków V_2), oznacza, że V_2 jest takim podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, R\}$, że $|V_2| = n_2$ oraz że każda z krawędzi ij ($i, j \in V_2$) jest zielona. Sposób, w jaki były kolorowane krawędzie dla V_2 , oznacza, że

dla każdego i, j z tego zbioru trzelementowy zbiór $\{i, j, R + 1\}$ jest zielony

Teraz, na podstawie (ii), albo istnieje r -elementowy podzbiór zbioru V_2 , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są czerwone, albo istnieje $(g - 1)$ -elementowy podzbiór W zbioru V_2 , którego wszystkie trzelementowe podzbiory są zielone. W pierwszym przypadku znaleźliśmy r -elementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, R + 1\}$, którego wszystkie trzelementowe podzbiory są czerwone, i w tej sytuacji dowód jest zakończony. Założmy więc, że istnieje $(g - 1)$ -elementowy podzbiór W zbioru V_2 taki, że

każdy trzelementowy podzbiór zbioru W jest zielony

W ten sposób W ma takie własności (przedstawione powyżej), że każdy trze-elementowy podzbiór zbioru W jest zielony oraz dla wszystkich $i, j \in W$ trze-elementowy zbiór $\{i, j, R + 1\}$ jest zielony. Jest więc oczywiste, że każdy trze-elementowy podzbiór g -elementowego zbioru $W \cup \{R + 1\}$ jest pokolorowany na zielono, i dowód, na podstawie zasady indukcji, jest zakończony. $\square$

Zainteresowany tą tematyką czytelnik łatwo domyśli się, jak można zdefiniować liczbę Ramseya $R_k(r, g)$ związaną z kolorowaniem k -elementowych podzbiorów. Wówczas nasza liczba Ramseya $R(r, g)$ pokrywa się z $R_2(r, g)$, a dowód poprzedniego twierdzenia pokazuje, że

$$R_3(r, g) \leq 1 + R_2(R_3(r - 1, g), R_3(r, g - 1))$$

oraz pozwala wywnioskować, stosując indukcję, istnienie $R_3(r, g)$ na podstawie istnienia liczb R_2 . Wytrwali czytelnicy będą w stanie sprawdzić, że to rozumowanie rozciąga się na

$$R_4(r, g) \leq 1 + R_3(R_4(r - 1, g), R_4(r, g - 1))$$

i jeszcze dalej, pokazując w końcu istnienie wszystkich liczb R_k . W rzeczywistości pełna postać twierdzenia Ramseya dotyczy k -elementowych podzbiorów oraz m kolorów i określa liczbę $R_k(r_1, \dots, r_m)$.

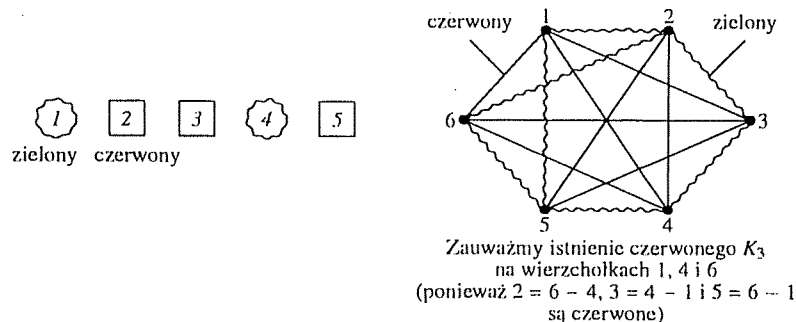
Widzieliśmy już kilka rezultatów wynikających z twierdzenia Ramseya. W najbardziej ogólnych słowach, stwierdza ono, że jeżeli pokolorujemy elementy pewnego, dostatecznie dużego zbioru, to musi zajść w ramach tego kolorowania pewna prawidłowość. Z tego względu współczesna „teoria Ramseya” ma o wiele szerszy zakres aniżeli jej pierwsze fundamentalne twierdzenie: składa się na nią wiele niebanalnych rezultatów, które w pewnym sensie stwierdzają, że „niemożliwy jest nieskończony nieporządek”. (Tak naprawdę to spotkaliśmy się już z jednym takim twierdzeniem we wcześniejszym rozdziale: na stronie 49 widzieliśmy, że w ciągu złożonym z $(r - 1)(g - 1) + 1$ różnych liczb będzie istniał rosnący podciąg o r wyrazach lub malejący podciąg o g wyrazach). Zainteresowany czytelnik może znaleźć bardzo dużą liczbę twierdzeń „ramseyowskiego typu” w książce R. L. Grahama, B. L. Rothschilda i J. H. Spencera *Ramsey theory*, cytowanej w spisie literatury.

Pozostała część tego rozdziału zawiera kilka zastosowań twierdzenia Ramseya i jego pokrewnych wyników.

Przykład: Pokazać, że jeżeli każda z liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ jest pokolorowana na czerwono lub zielono, to będą istniały liczby x, y oraz z (niekoniecznie różne) o tej samej barwie i takie, że $x + y = z$.

Rozwiązanie: Dla takich małych liczb oczywiście można to łatwo potwierdzić metodą prób i błędów. Jednakże, aby pokazać ogólną technikę dowodu, wyprowadzimy ten rezultat, opierając się na przedstawionej wcześniej teorii Ramseya. Założmy więc, że każda liczba od 1 do 5 jest pokolorowana na czerwono lub zielono: dokonajmy kolorowania krawędzi grafu K_6 za pomocą kolorów czerwonego i zielonego.

Mając dany graf pełny K_6 na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, każdej z jego krawędzi można przyporządkować liczbę od 1 do 5, stosując regułę, że krawędź ij ma liczbę $|i - j|$. Wtedy każda krawędź może być pokolorowana na czerwono lub zielono, zgodnie z kolorem odpowiadającej jej liczby od 1 do 5; np.



Ponieważ liczba Ramseya $R(3, 3)$ wynosi 6, więc rozważany graf K_6 będzie zawierał K_3 o jednokolorowych krawędziach: założmy, że jego zbiorem wierzchołków jest $\{i, j, k\}$, gdzie $i < j < k$ (tak jak ten na zbiorze wierzchołków $\{1, 4, 6\}$ przedstawiony na rysunku). Ale to oznacza, że krawędzie, którym przyporządkowano liczby $k - j$, $j - i$ oraz $k - i$ są tego samego koloru. Tak więc liczby $x = k - j$, $y = j - i$ oraz $z = k - i$ mają ten sam kolor oraz spełniają równość $x + y = z$, co było do pokazania. $\square$

Nasze wcześniejsze twierdzenie (strona 228), dotyczące kolorowania grafu K_M za pomocą m kolorów, pozwala teraz w prosty sposób uogólnić ten przykład na dowolną liczbę kolorów: dowód ma ten sam przebieg co poprzednie rozwiązanie i jest pozostawiony jako łatwe zadanie.

Twierdzenie: (Schura) Dla danej dodatniej liczby całkowitej m niech M będzie takie, że jeżeli krawędzie grafu K_M są pokolorowane m kolorami, to istnieje jednokolorowy K_3 . (Jak zobaczymy w zadaniach, liczba $M = |m!e| + 1$ będzie spełniała to twierdzenie). Wówczas, jeżeli każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, M - 1\}$ jest pokolorowana jednym z m kolorów, to istnieją liczby x, y, z (niekoniecznie różne) o tym samym kolorze oraz takie, że $x + y = z$. $\square$

Wynik ten (który poprzedza o ponad dekadę twierdzenie Ramseya) został udowodniony przez niemieckiego matematyka, I. Schura. Jednakże jego rezultat z 1916r. tak naprawdę dotyczy pewnej wersji „wielkiego twierdzenia Fermata” (w wersji modulo p), w którego dowodzie jest zastosowany powyższy wynik typu ramseyowskiego. Przytoczymy to twierdzenie, pomijając jednak pewne szczegóły dowodu, gdyż wymagają one znajomości teorii warstw.

Twierdzenie: Dla danej dodatniej liczby całkowitej m niech M będzie określone, tak jak w poprzednim twierdzeniu, i niech p będzie dowolną liczbą pierwszą, przy

czym $p \geq M$. Wówczas istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$ takie, że

$$\alpha^m + \beta^m \equiv \gamma^m \pmod{p}$$

(i w rzeczywistości można przyjąć za α liczbę 1).

Dowód: (ze wszystkimi szczegółami tylko w jednym przypadku) Niech m, M oraz p będą takie jak w założeniach twierdzenia. Wówczas, na podstawie poprzedniego twierdzenia, jeżeli każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, p - 1\}$ jest pokolorowana jednym z m kolorów, to będą istniały x, y, z (niekoniecznie różne) o tym samym kolorze oraz takie, że $x + y = z$.

Teraz zwykle działania modulo p na zbiorze $\{0, 1, \dots, p - 1\}$ tworzą z niego ciało i, w szczególności, każda liczba x różna od zera ma element odwrotny (względem mnożenia) x^{-1} . Dokonajmy pokolorowania zbioru $\{1, 2, \dots, p - 1\}$ w ten sposób, że x oraz y będą miały ten sam kolor wtedy i tylko wtedy, gdy $x^{-1} \cdot y \equiv \delta^m \pmod{p}$, dla pewnego $\delta \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$. W ogólnym przypadku daje to pokolorowanie zbioru $\{1, 2, \dots, p - 1\}$ za pomocą co najwyżej m kolorów. (Tak naprawdę niezerowe m -te potęgi tworzą multiplikatywną podgrupę zbioru $\{1, 2, \dots, p - 1\}$, a liczba kolorów będzie liczbą warstw, mianowicie największym wspólnym dzielnikiem liczb m oraz $p - 1$.) Dla przykładu, gdy $m = 3$, moglibyśmy przyjąć $M = 18$ i $p = 19$. Wówczas jedynymi różnymi niezerowymi m -tymi potęgami modulo p są

$$1, 7(\equiv 4^3), 8(\equiv 2^3), 11(\equiv 5^3), 12(\equiv 10^3) \text{ i } 18(\equiv 8^3)$$

Zastosujemy je teraz, aby wyznaczyć kolorowanie zbioru $\{1, 2, \dots, 18\}$ za pomocą trzech lub mniej kolorów, w przedstawiony powyżej sposób. Zauważmy na przykład, że w rozpatrywanym ciele $6^{-1} = 16$, a więc $6^{-1} \cdot 4 \equiv 7$, co jest jedną z tych m -tych potęg. W ten sposób 6 i 4 będą wymagały tego samego koloru. W rzeczywistości są potrzebne trzy kolory do pokolorowania zbioru $\{1, 2, \dots, 18\}$ w opisany sposób; jednym z tych kolorowań jest:

$$\begin{aligned} \text{czerwony: } & 1, 7, 8, 11, 12, 18 & \text{zielony: } & 2, 4, 6, 9, 10, 15 \\ & & \text{niebieski: } & 3, 5, 13, 14, 16, 17 \end{aligned}$$

(i algebraicy rozpoznają je jako warstwy ze względu na podgrupę $\{1, 7, 8, 11, 12, 18\}$).

Powróćmy teraz do ogólnego przypadku: w rozważanej procedurze koloruje się zbiór $\{1, 2, \dots, p - 1\}$ za pomocą m kolorów, a więc na podstawie wcześniejszych uwag będą istniały jednokolorowe liczby x, y oraz z , dla których zachodzi $x + y = z$. Zatem w ciele $\{0, 1, \dots, p - 1\}$ z działaniami modulo p mamy

$$1 + x^{-1} \cdot y \equiv x^{-1} \cdot z \pmod{p}$$

Jednakże

- (i) $1 \equiv \alpha^m \pmod{p}$, gdzie $\alpha = 1$,
- (ii) ponieważ x oraz y są tego samego koloru, mamy więc $x^{-1} \cdot y \equiv \beta^m \pmod{p}$, dla pewnego $\beta \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$,

(iii) ponieważ x oraz z są tego samego koloru, mamy więc $x^{-1} \cdot z \equiv \gamma^n \pmod{p}$, dla pewnego $\gamma \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

W ten sposób

$$1 + x^{-1} \cdot y \equiv x^{-1} \cdot z \pmod{p} \Rightarrow \alpha^m + \beta^m \equiv \gamma^n \pmod{p}$$

dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, co było do udowodnienia. $\square$

Nasz następny wynik ramseyowski ma podobną strukturę do pewnych wcześniejszych, lecz w rzeczywistości nie jest on bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Ramseya.

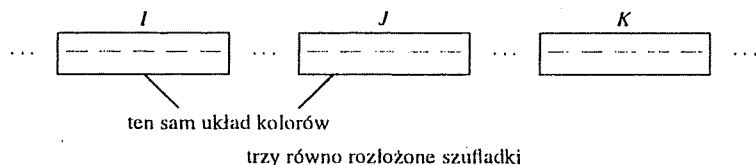
Przykład: Pokazać, że jeżeli każda z liczb zbioru $\{1, 2, \dots, 325\}$ jest pokolorowana na czerwono lub zielono, to istnieją trzy różne liczby x, y oraz z jednego koloru takie, że $y = \frac{1}{2}(x+z)$.

Rozwiązanie: Tak naprawdę liczba 325 jest dużo większa od tej koniecznej (w rzeczywistości liczba 9 jest wystarczająca!), lecz my chcemy zastosować metodę, którą będzie można łatwo uogólnić. Załóżmy, że mamy dane liczby od 1 do 325, z których każda jest pokolorowana na czerwono (C) lub zielono (Z). Naszym celem jest znalezienie takich trzech liczb o tym samym kolorze, z których jedna znajduje się dokładnie w połowie między dwoma pozostałymi.

Zapiszmy nasze liczby w długiej linii i podzielmy je na 65 „szufladek”, po pięć w każdej:

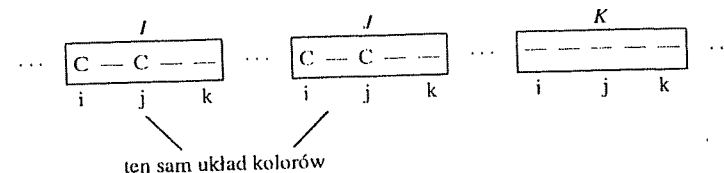
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ... 161 162 163 164 165 ... 321 322 323 324 325

Przedstawmy układ kolorów każdej szufladki: na przykład jedna z szufladek może mieć układ kolorów C C Z Z C, inna zaś układ Z C Z Z C. Łącznie mamy $32 (= 2^5)$ różnych możliwych układów. Tak więc (na podstawie zasady szufladkowej) wśród pierwszych 33 szufladek, dwie muszą mieć taki sam układ kolorów: założmy, że szufladki I -ta oraz J -ta mają taki sam układ kolorów, gdzie $1 \leq I < J \leq 33$. Wówczas, jeżeli $K = 2J - I$, to $K \leq 65$, a więc istnieje na naszej liście K -ta szufladka; ponadto J -ta szufladka znajduje się dokładnie w połowie między szufladkami I -tą oraz K -tą:

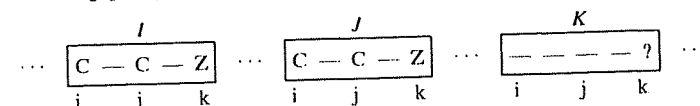


Spójrzmy teraz na pierwsze trzy elementy w I -tej szufladce: ponieważ są tylko dwa kolory, jeden z nich w tych trzech elementach musi być powtórzony; założmy, że pozycje, powiedzmy, i -ta oraz j -ta są obie czerwone, gdzie $1 \leq i < j \leq 3$. Wówczas, jeżeli $k = 2j - i$, to $k \leq 5$, a więc istnieje k -ta pozycja w tej I -tej szu-

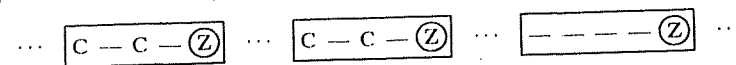
fladce; ponadto j -ty element leży pośrodku między i -tym oraz k -tym. Pokażemy jedną z takich typowych sytuacji:



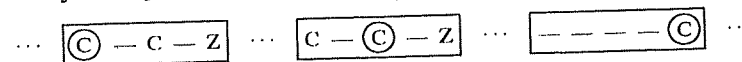
Jakiego koloru jest k -ty element w I -tej szufladce? Jeżeli jest czerwony, to od razu mamy trzy czerwone liczby, z których jedna leży pośrodku dwóch pozostałych (mianowicie i -ty, j -ty oraz k -ty element w I -tej szufladce). Załóżmy więc, że k -ty element w I -tej szufladce jest zielony; ponieważ J -ta szufladka ma ten sam układ kolorów, jej k -ty element jest również zielony:



Ale jakiego koloru jest teraz k -ty element w K -tej szufladce (jest on oznaczony powyżej przez „?”)? Jeżeli jest on zielony, to możemy znaleźć trzy zielone liczby, z których jedna leży pośrodku, między dwoma pozostałymi (mianowicie k -te elementy w szufladkach I -tej, J -tej oraz K -tej):



A jeżeli k -ty element w K -tej szufladce jest czerwony, to możemy znaleźć trzy czerwone liczby, z których jedna leży pośrodku dwóch pozostałych (mianowicie element i -ty w I -tej szufladce, j -ty w J -tej szufladce oraz k -ty w K -tej szufladce):



W konsekwencji we wszystkich przypadkach znaleźliśmy trzy liczby x, y oraz z tego samego koloru, z których y leży pośrodku, między x oraz z ; tj. $y = \frac{1}{2}(x+z)$, co było do udowodnienia. $\square$

W jaki sposób została wybrana liczba 325? Ponieważ były dwa kolory, każda szufladka musiała zawierać $2 \cdot 2 + 1 = 5$ elementów. To dało nam $2^5 = 32$ różnych układów kolorów w szufladkach, a więc potrzebowaliśmy $2 \cdot 32 + 1 = 65$ szufladek; tj.

$$325 = (2 \cdot 2 + 1) \cdot (2 \cdot 2^{2+1} + 1) = (2 \cdot 2 + 1) \cdot (2 \cdot 2^{\text{poprzedni nawias} + 1})$$

Rozważmy teraz równoważny problem z trzema kolorami. Jaką liczbę L musimy przyjąć, aby mieć pewność, że stosując podobną argumentację wykażemy, że jeżeli każda z liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, L\}$ zostanie pokolorowana na czerwono,

zielono lub niebiesko, to będą istniały trzy różne liczby x , y oraz z jednego koloru takie, że $y = \frac{1}{2}(x+z)$? Jak zobaczymy w zadaniach, uogólnienie powyższego rozumowania rzeczywiście jest spełnione dla

$$L = (2 \cdot 3 + 1) \cdot (2 \cdot 3^{\text{poprzedni nawias}} + 1) \cdot (2 \cdot 3^{\text{poprzednie dwa nawiasy}} + 1)$$

a w przypadku czterech kolorów powinniśmy przyjąć

$$L = (2 \cdot 4 + 1)(2 \cdot 4^{\text{poprzedni nawias}} + 1) \cdot (2 \cdot 4^{\text{poprzednie dwa nawiasy}} + 1) \cdot (2 \cdot 4^{\text{poprzednie trzy nawiasy}} + 1)(!)$$

i tak dalej. Chociaż ta metoda rzeczywiście uogólnia się na dowolną liczbę kolorów, jednak otrzymywane zbiory stają się bardzo duże, a sama metoda bardzo techniczna; z tego powodu przytoczymy po prostu wynik dla m kolorów bez dowodu.

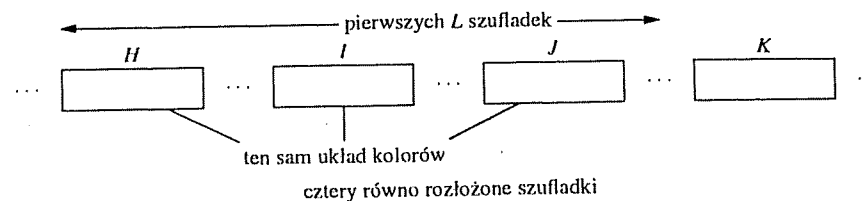
Twierdzenie: Dla danej dodatniej liczby całkowitej m istnieje liczba całkowita L taka, że jeżeli każda z liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, L\}$ jest pokolorowana jednym z m kolorów, to istnieją trzy różne liczby x , y oraz z jednego koloru, takie że $y = \frac{1}{2}(x+z)$. $\square$

Innym sposobem wyrażenia zależności między trzema liczbami z tego twierdzenia jest ustalenie, że szukamy trzech różnych liczb x , y oraz z o tym samym kolorze, które tworzą trzywyrazowy ciąg arytmetyczny. Zrobimy teraz jeszcze jeden krok dalej i znajdziemy jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości cztery.

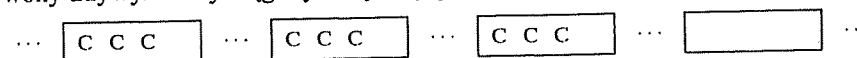
Przykład: Na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje liczba L taka, że jeżeli liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, L\}$ są pokolorowane za pomocą 2^{650} kolorów, to będzie istniał jednokolorowy trzywyrazowy ciąg arytmetyczny. Pokazać, że jeżeli liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 1300L\}$ są pokolorowane na czerwono i zielono, to istnieje jednokolorowy, czterowyrazowy ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie: Załóżmy, że mamy dane liczby od 1 do $1300L$, z których każda jest pokolorowana na czerwono (C) lub zielono (Z). Zapiszmy te liczby w postaci długiej (!) listy i podzielmy je między $2L$ szufladki, z których każda zawiera 650 liczb. Liczba możliwych układów kolorów w tych szufladkach wynosi 2^{650} i, traktując te układy jako sposoby pokolorowania szufladek, w pierwszej ich połowie mamy ciąg L szufladek, z których każda może być pokolorowana jednym z 2^{650} kolorów. Taki wybór liczby L pozwala nam zastosować do tych szufladek poprzednie twierdzenie. Otrzymujemy więc, że wśród pierwszych L szufladek istnieją trzy, które mają ten sam układ kolorów i z których jedna leży pośrodku, między dwiema pozostałymi. Załóżmy, że tymi szufladkami są H , I oraz J , przy

czym $H < I < J$, i narysujmy je wraz z szufladką K , gdzie $K = 2J - I$:



Ponieważ szufladka H zawiera 650 liczb, więc z poprzedniego przykładu wynika, że wśród pierwszych 325 liczb znajdzie się jednokolorowy trzywyrazowy ciąg arytmetyczny. Załóżmy, że szufladka H (a więc również I oraz J) zawiera czerwony trzywyrazowy ciąg arytmetyczny, jak pokazano:



Jeżeli kolejny wyraz tego ciągu arytmetycznego jest czerwony, to znaleźliśmy to, czego szukaliśmy. Załóżmy więc, że kolejny wyraz ciągu (który również jest w tej samej szufladce) jest zielony i spójrzmy na odpowiadającą mu pozycję w szufladce K :



Jeżeli element na tej pozycji (oznaczonej „?”) jest zielony, to możemy wybrać następujący czterowyrazowy ciąg arytmetyczny koloru zielonego:



Jeżeli jednak element na pozycji oznaczonej „?” jest czerwony, to możemy wybrać następujący czterowyrazowy ciąg arytmetyczny koloru czerwonego:



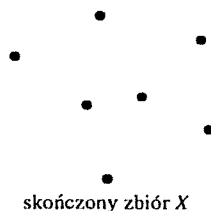
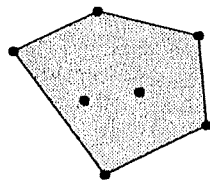
W ten sposób w każdym przypadku znaleźliśmy czterowyrazowy jednokolorowy ciąg arytmetyczny, co daje rozwiązanie. $\square$

Liczby z powyższego przykładu zostały wybrane dla naszej wygody, są one jednak o wiele za duże w porównaniu z liczbami, które rzeczywiście są konieczne. (Najmniejsze liczby, które spełniają te własności są nazywane *liczbami van der Waerdena*, podobnie do wcześniej wprowadzonych liczb Ramseya). Przykład ten pokazuje, w jaki sposób twierdzenie dotyczące trzywyrazowych ciągów arytmetycznych o dowolnej liczbie kolorów umożliwia (przez jego zastosowanie do szufladek z odpowiednio dobraną liczbą elementów) wywnioskowanie równoważnego rezultatu dla czterowyrazowych ciągów arytmetycznych. Twierdzenie dla czterowyrazowych ciągów powinno następnie dać możliwość przejścia do pięciowyrazowych ciągów i tak dalej. Nie wdając się w horendalne szczegóły tego indukcyjnego dowodu i nie rozważając już dalszych aspektów tego zagadnienia,

sformułujemy ogólną postać twierdzenia podanego przez B. L. van der Waerdena w 1927 r.

Twierdzenie: (van der Waerdena) Niech r oraz m będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wówczas istnieje liczba całkowita L taka, że jeżeli każda z liczb zbioru $\{1, 2, \dots, L\}$ jest pokolorowana jednym z m kolorów, to istnieje jednokolorowy r -wyrazowy ciąg arytmetyczny. $\square$

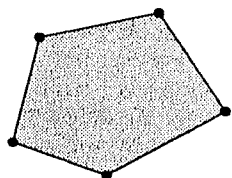
Nasze ostatnie zastosowanie twierdzenia Ramseya umożliwia wywnioskować pewien wynik dotyczący wypukłych wielokątów. Rozpocniemy od przypomnienia podstawowych terminów związanych z tym zagadnieniem, z których prawdopodobnie większość jest czytelnikowi znana. Zbiór na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeżeli odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do zbioru również do niego należy. Dla dowolnego określonego zbioru na płaszczyźnie jego *wypukła otoczką* jest to przekrój wszystkich zbiorów wypukłych, zawierających ten zbiór (a więc jest to najmniejszy zbiór wypukły zawierający zadany zbiór). *Wypukły wielokąt* P jest wypukłą otoczką skończonego zbioru punktów na płaszczyźnie, a *wierzchołkiem* wielokąta P jest punkt $v \in P$ taki, że $P \setminus \{v\}$ jest wypukły. Na przykład

skończony zbiór X otoczką wypukłą zbioru X
(= wypukły wielokąt na pięciu wierzchołkach)

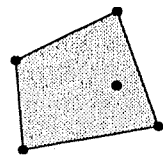
Aby otrzymać rezultat typu ramseyowskiego o wypukłych wielokątach, będą potrzebne dwie podstawowe ich własności.

Przykład: Pokazać, że jeżeli wyznaczmy na płaszczyźnie pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, to cztery spośród tych punktów utworzą wierzchołki wypukłego czworokąta.

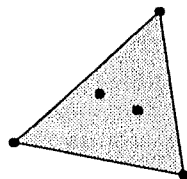
Rozwiązanie: Weźmy pod uwagę wierzchołki wypukłej otoczki pięciu punktów: będzie ich trzy, cztery lub pięć. Na przykład



pięć wierzchołków

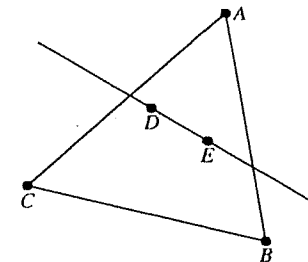


cztery wierzchołki



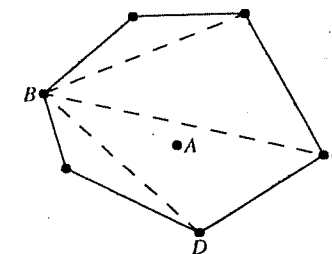
trzy wierzchołki

W przypadku pięciu wierzchołków *każde* cztery utworzą wierzchołki wypukłego czworokąta, a w przypadku czterech wierzchołków tworzą one od razu wierzchołki rozważanego czworokąta. Na koniec, kiedy mamy tylko trzy wierzchołki A, B i C , wtedy dwa pozostałe punkty D oraz E będą wewnątrz trójkąta utworzonego przez tamte trzy. Prosta przechodząca przez punkty D i E przecina dokładnie dwa boki trójkąta ABC : założmy, że nie przecina ona boku BC (jak pokazano). Wówczas łatwo jest zauważyć, że B, C, D i E stanowią wierzchołki wypukłego czworokąta. $\square$



Przykład: Pokazać, że jeżeli $r (\geq 4)$ punktów na płaszczyźnie nie tworzy wierzchołków wypukłego wielokąta, to pewne cztery punkty spośród nich nie utworzą wierzchołków wypukłego czworokąta.

Rozwiązanie: Załóżmy, że mamy r punktów, które nie tworzą wierzchołków wypukłego wielokąta. Jeden z nich, powiedzmy A , leży w wypukłej otoczce pozostałych $r - 1$ punktów. Wierzchołkami tej wypukłej otoczki będą pewne punkty spośród tych r zadanych (na rysunku pokazujemy właśnie te). Wówczas A będzie leżał albo wewnątrz jednego z trójkątów, utworzonego przez trzy spośród tych wierzchołków, powiedzmy B, C i D (jak na rysunku), albo na boku, powiedzmy BC . Ale wówczas cztery punkty A, B, C i D nie stanowią wierzchołków wypukłego czworokąta, co było do pokazania. $\square$



To bardzo krótkie wprowadzenie w tematykę wypukłych wielokątów prowadzi do następującego twierdzenia typu ramseyowskiego.

Twierdzenie: Niech r będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas istnieje liczba całkowita R taka, że dowolnych R punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na prostej, musi zawierać r punktów, które tworzą wierzchołki wypukłego wielokąta.

Dowód: Na stronie 235 pokazaliśmy, jak udowodnić istnienie liczb Ramseya w przypadku czerwonych i zielonych czteroelementowych podzbiorów. Wiemy więc, że jeżeli mamy dane liczby całkowite $r, g \geq 4$, to istnieje liczba całkowita $R = R_4(r, g)$ o następującej własności: jeżeli wszystkie czteroelementowe podzbiory pewnego R -elementowego zbioru są pokolorowane na czerwono lub zielono, to będzie istniał r -elementowy podzbiór, którego wszystkie czteroelementowe podzbiory są czerwone, albo będzie istniał g -elementowy podzbiór, którego wszystkie czteroelementowe podzbiory są zielone.

Aby udowodnić teraz to twierdzenie, zauważmy najpierw, że jest ono oczywiste, gdy $r \leq 3$. Wówczas bowiem r punktów (z których żadne trzy nie leżą na prostej) tworzy już wierzchołki wypukłego wielokąta, a więc możemy przyjąć $R = r$.

Załóżmy zatem, że $r \geq 4$ i niech R będzie liczbą Ramseya $R_4(r, 5)$: aby udowodnić, że R jest liczbą żadaną w twierdzeniu, przyjmijmy, iż mamy danych R punktów na płaszczyźnie (z których żadne trzy nie leżą na prostej); pokażemy, że istnieje r spośród nich, które stanowią wierzchołki wypukłego wielokąta.

Pokolorujemy każdy czteroelementowy podzbiór R punktów w następujący sposób:

„Na czerwono”	„Na zielono”
jeżeli te cztery punkty tworzą wierzchołki wypukłego czworokąta;	jeżeli te cztery punkty nie tworzą wierzchołków wypukłego czworokąta (tj. gdy jeden z punktów leży w wypukłej otoczce pozostałych trzech).

Wówczas wybór R jako liczby Ramseya $R_4(r, 5)$ gwarantuje, że albo będzie istnieć:

- (i) r spośród tych punktów takich, że każdy ich czteroelementowy podzbiór jest czerwony, albo
- (ii) pięć spośród tych punktów takich, że każdy ich czteroelementowy podzbiór jest zielony.

Pierwszy z dwóch naszych poprzednich przykładów dotyczących wypukłych wielokątów pokazuje, że dowolnych pięć spośród tych punktów będzie zawierało cztery, które tworzą wierzchołki wypukłego czworokąta. Fakt ten można wyrazić w terminologii kolorowania mówiąc, że każde pięć spośród tych punktów zawiera czerwony czteroelementowy podzbiór, a zatem przypadek (ii) jest niemożliwy. Musi więc zachodzić (i), to znaczy istnieje r spośród tych punktów takich, że ich każdy czteroelementowy podzbiór jest czerwony.

Tak więc znaleźliśmy r punktów, z których każde cztery tworzą wierzchołki wypukłego czworokąta. Na podstawie drugiego ze wspomnianych przykładów oznacza to, że tych r punktów musi tworzyć wierzchołki wypukłego wielokąta, co było do wykazania. $\square$

Rezultatem tym kończymy nasze rozważania dotyczące teorii Ramseya, zbliżając się powoli do końca książki. Jest dobrze, że doszliśmy do pasjonującego tematu, który łączy dwa nasze główne nurty rozważań, argumenty wyboru i teorię grafów. Jest również dobrze, że zastosowania tych (jak wielu innych w tej książce) zagadnień mają wspólne obszary z teorią liczb, algebrą i geometrią, i że wiele dróg, wiedzie do dalszych badań. Mam nadzieję, że czytelnikowi spodobała się ta książka o szeroko zakrojonej tematyce, ukazująca matematyczną kombinatorykę w „działaniu” i że „pobudziła apetyt na więcej” u tych czytelników, którzy chcą kontynuować studiowanie matematyki.

ZADANIA

1. Pokazać, że jeżeli każda krawędź grafu K_6 jest pokolorowana na czerwono lub zielono, to będą istniały co najmniej dwa jednokolorowe podgrafy K_3 . Pokazać, że jeżeli K_7 jest pokolorowany w ten sposób, to będą istniały co najmniej trzy jednokolorowe podgrafy K_3 .

2. Niech q będzie dodatnią liczbą całkowitą, niech $Q = \binom{2q}{q}$ i załóżmy, że każda krawędź grafu K_Q została pokolorowana na czerwono lub zielono w ten sposób, że nie istnieje żaden jednokolorowy podgraf K_{q+2} . Pokazać, że istnieje podgraf K_{q+1} o krawędziach jednego koloru i istnieje podgraf K_q o krawędziach drugiego koloru. [W]

3. Pokazać, że dla liczb całkowitych $r, g > 2$ liczby Ramseya spełniają nierówność

$$R(r, g) \leq R(r-1, g) + R(r, g-1) \quad [W]$$

Pokazać również, że jeśli $R(r-1, g)$ oraz $R(r, g-1)$ są parzyste, to zachodzi ostra nierówność. [W]

4. Niech $g \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Rozważmy graf pełny na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, 3g-4\}$. Pokolorujmy krawędź ij tego grafu na czerwono, jeżeli $|i-j| \equiv 1 \pmod{3}$, a na zielono w przeciwnym razie. Pokazać, że tak pokolorowany graf nie zawiera ani czerwonego podgrafu K_3 , ani zielonego podgrafu K_g . Wywnioskować, że $R(3, g) \geq 3(g-1)$. [W]

5. Stosując wyniki zadań 3 i 4, pokazać, że $R(3, 4) = 9$.

6. Niech $r \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać, że $R(2r, 2r) > 2^r$. [W]

7. Dla danych liczb całkowitych $r, g, b \geq 2$ niech $R(r, g, b)$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą n taką, że jeżeli krawędzie grafu K_n zostały pokolorowane na czerwono, zielono lub niebiesko, to istnieje czerwony podgraf K_r , zielony podgraf K_g lub niebieski podgraf K_b . Pokazać, że

$$(i) R(r, g, 2) = R(r, g)$$

$$(ii) R(r, g, b) \leq \min\{R(r, R(g, b)), R(g, R(r, b)), R(b, R(r, g))\} \quad [W]$$

$$(iii) \text{ dla } r, b, g > 2$$

$$R(r, g, b) < R(r-1, g, b) + R(r, g-1, b) + R(r, g, b-1) \quad [W]$$

$$(iv) R(r, g, b) \leq \frac{(r+g+b-3)!}{(r-1)!(g-1)!(b-1)!} \quad [W]$$

Korzystając z wyników części (i) oraz (iii), wywnioskować, że $R(3, 3, 3) \leq 17$.

8. Niech ciąg liczb całkowitych $M_1, M_2, M_3, \dots$ będzie zdefiniowany zależnością rekurencyjną

$$M_1 = 3 \quad \text{ i } \quad M_m = m M_{m-1} - m + 2 \quad (m > 1)$$

(i) Pokazać, że $M_m = [m!e] + 1$. [W]

(ii) Pokazać przez indukcję, że jeżeli krawędzie grafu K_{M_m} są pokolorowane za pomocą m kolorów, to istnieje jednokolorowy podgraf K_3 . [W]

9. Niech $r \geq 2$ będzie liczbą całkowitą i niech $R_1, R_2, R_3, \dots$ będzie ciągiem określonym zależnością rekurencyjną

$$R_1 = r \quad \text{ i } \quad R_m = \binom{2R_{m-1} - 2}{R_{m-1} - 1} \quad (m > 1)$$

Pokazać, że jeżeli krawędzie grafu K_{R_m} są pokolorowane 2^m kolorami, to istnieje jednokolorowy podgraf K_r . [W]

10. Pokazać, że jeżeli każda krawędź grafu $K_{(r-1)^2+1}$ jest pokolorowana na czerwono lub zielono, to albo każde drzewo na r wierzchołkach jest czerwone, albo każde drzewo na r wierzchołkach jest zielone.

11. Niech G_1 będzie grafem o liczbie chromatycznej $\chi(G_1) = r$ i niech G_2 będzie grafem spójnym na g wierzchołkach. Znaleźć takie kolorowanie krawędzi grafu $K_{(r-1)(g-1)}$ na czerwono i na zielono, dla którego nie istnieje czerwony podgraf G_1 i zielony podgraf G_2 . [O]

12. Niech T_1 będzie drzewem na r wierzchołkach i niech T_2 będzie drzewem na g wierzchołkach, wśród których jest wierzchołek stopnia $g-1$. Pokazać, że jeżeli każda krawędź grafu K_{r+g-2} jest pokolorowana na czerwono lub zielono, to istnieje czerwony podgraf T_1 lub zielony podgraf T_2 . [W]

W przypadku gdy $g-2$ jest wielokrotnością liczby $r-1$, pokazać, że $r+g-2$ jest najmniejszą liczbą o tej własności, przedstawiając kolorowanie grafu K_{r+g-3} na czerwono i na zielono, w wyniku którego nie powstanie czerwony T_1 , jak i zielony T_2 . [O]

13. Mówimy, że dodatnia liczba całkowita ma własność $\mathfrak{S}$, jeżeli suma jej czynników pierwszych jest nieparzysta. (Na przykład 54 ma własność $\mathfrak{S}$, gdyż $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ a $2 + 3 + 3 + 3$ jest liczbą nieparzystą). Pokazać, że istnieje nieskończony zbiór dodatnich liczb całkowitych takich, że suma dowolnych dwóch z nich ma własność $\mathfrak{S}$. [W]

14. Załóżmy, że każda liczba całkowita została pokolorowana na czerwono lub zielono. Wiadomo, że każda liczba wymierna x , gdzie $0 < x < 1$ może być jednoznacznie przedstawiona w swojej najmniejszej postaci jako m/n , przy czym m oraz n są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Tak więc każda taka liczba wymierna ma jeden z czterech „typów

kolorów”; czerwony/czerwony, czerwony/zielony, zielony/czerwony lub zielony/zielony. Pokazać, że istnieje nieskończony, jednokolorowy zbiór dodatnich liczb całkowitych taki, że dla dowolnej pary liczb, jeżeli mniejsza z nich jest podzielona przez większą, to otrzymamy liczbę wymierną o tym samym „typie kolorów”.

15. Mając daną macierz kwadratową, jej *podmacierz zasadniczą* otrzymujemy przez usunięcie dowolnych wierszy i odpowiadających im kolumn. Nazywamy kwadratową macierz *semi-stałą*, jeżeli każdy wyraz powyżej głównej przekątnej jest taką samą stałą i jeżeli każdy wyraz poniżej głównej przekątnej jest również jakąś stałą (niekoniecznie taką samą jak ta pierwsza). Wówczas, dla przykładu, macierz pokazana po lewej stronie ma podmacierz zasadniczą wymiaru 3×3 , która jest semi-stałą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1 oraz 4}]{\text{usunąć wiersze i kolumny}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Niech $r \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać, że istnieje liczba całkowita R , taka że każda zero-jedynkowa macierz wymiaru $R \times R$ ma podmacierz zasadniczą wymiaru $r \times r$, która jest semi-stałą. [W]

16. Pokazać, że jeżeli każda liczba ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jest pokolorowana na czerwono lub zielono, to istnieje jednokolorowy trzywyrazowy ciąg arytmetyczny.

17. Niech $L = 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot (2 \cdot 3^7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) + 1)$. Pokazać, że jeżeli każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, L\}$ jest pokolorowana na czerwono, zielono lub niebiesko, to istnieje jednokolorowy trzywyrazowy ciąg arytmetyczny. [W]

18. Niech r oraz m będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Zastosować przedstawioną postać twierdzenia van der Waerdena, aby pokazać, że istnieje liczba L^* taka, że jeżeli każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, L^*\}$ jest pokolorowana jednym z m kolorów, to istnieje r -wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym każdy z jego wyrazów oraz różnica ciągu są tego samego koloru. [W]

Wskazówki do zadań

Rozdział 1

- „Różne metody” obejmują:
 - rozpisanie za pomocą silni;
 - porównanie współczynników przy x^k w $(1+x)^n$ i w $x^n(1+\frac{1}{x})^n$;
 - potraktowanie „wybranie k spośród n ” jako „wybranie $n-k$ do pominięcia”; itp.
- Jest to równoważne postawieniu $k-1$ barierki w $n-1$ możliwych miejscach między osobami w kolejce.
- Nie należy odwołać się do wcześniejszego, analogicznego przykładu z nieujemnymi x_i , a raczej zauważyć, że takie rozbięcie n jest równoważne rozdzieleniu kolejki na grupy w zadaniu 2.
- (i) $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

$$\equiv (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_k + 1) = n + k$$

$$\equiv y_1 + y_2 + \dots + y_k = n + k$$

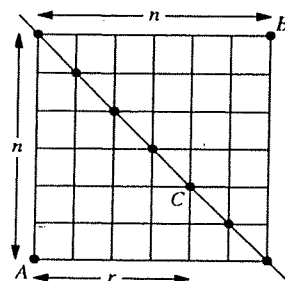
(każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą)

(każde $(x_i + 1)$ jest dodatnią liczbą całkowitą)

(każde y_i jest dodatnią liczbą całkowitą)
- Jest to równoważne posiadaniu $n-k$ wolnych krzeseł i wybraniu k pozycji z dostępnych miejsc między tymi krzesełami (włączając w to miejsce przed pierwszym i miejsce za ostatnim krzesłem), a następnie postawieniu w każde wybrane miejsce krzesła z siedzącą na nim osobą.

$\square \square \square \square \dots \square$ $n-k$ wolnych krzeseł
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \quad \uparrow$
 wybrać k

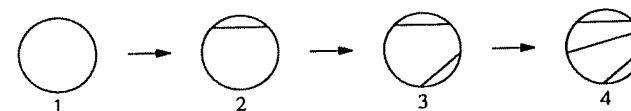
- (i) Współczynnik przy x^n w $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.
- (ii) Wybranie n osób jest równoważne wybraniu r mężczyzn i $n-r$ kobiet, dla pewnego r (co jest tym samym, co wybranie r mężczyzn, których włączymy, oraz r kobiet, które wykluczmy).
- (iii) W przedstawionej kratce jest $\binom{2n}{n}$ najkrótszych dróg od A do B . Każda przechodzi przez dokładnie jeden z punktów pokazanej przekątnej.



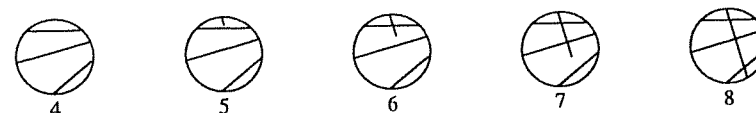
Wskazówki do zadań

249

- (iii) Różne metody obejmują ponownie argument podzbior/przywódca lub różniczkowanie $(1+x)^n$.
- (ii) x_i prostych przecina się z pozostałymi $n-x_i$ prostymi, więc ogólna liczba przecięć wynosi $\frac{1}{2} \sum x_i(n-x_i)$. Wiadomo również, że $\sum x_i = n$.
 (iii) Należy znaleźć (metodą prób i błędów, jeżeli wszystko inne zawiedzie) pewne x_i , których suma wynosi 17 i których kwadraty sumują się do $17^2 - 2 \times 101$.
- (i) Wybranie prostokąta jest równoważne wybraniu dwóch linii poziomych i dwóch linii pionowych.
 (ii) Liczba żądanych prostokątów jest równa liczbie prostokątów leżących w górnym narożniku wymiaru $r \times r$, a nie leżących w górnym narożniku wymiaru $(r-1) \times (r-1)$.
- (iii) Ile trójkątów ma wysokość n ? 1
 Ile wysokość $n-1$? 1+2
 A ile wysokość $n-2$? 1+2+3
 ⋮
 (iv) Ile trójkątów ma wysokość 1? 1+2+⋯+(n-1)
 A ile wysokość 2? 1+2+⋯+(n-3)
 ⋮
- Bez żadnej linii koło ma dokładnie jeden obszar. Rozważmy teraz dowolny zbiór linii. Jeżeli narysujemy nową linię przechodzącą przez koło, która nie przecina żadnej istniejącej linii, to w efekcie zwiększa się liczba obszarów o 1:



Dodatkowo, za każdym razem, gdy nowa linia przecina istniejącą linię wewnątrz koła, liczba obszarów powiększa się ponownie o 1:

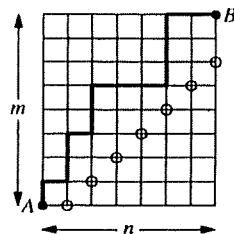


Mając to na uwadze, otrzymujemy

$$\text{liczba obszarów} = 1 + \text{liczba linii} + \text{liczba punktów przecięcia}$$

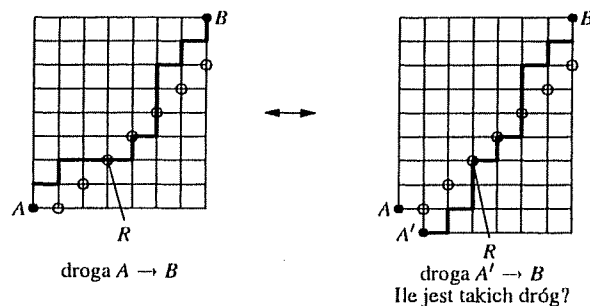
- (Przypadek $m \geq n$.) Rozważmy przedstawioną kratę wymiaru $m \times n$. Jeżeli pomyślimy o odcinku „w górę” jak o „pięćdziesięciopensowym kliencie”, a o odcinku

„w prawo” jak o „jednofuntowym kliencie”, to każda z dróg od A do B odpowiada możliwemu ustawieniu kolejki.



Ile z tych kolejek/dróg doprowadzi do sytuacji, w której sprzedawca nie będzie miał możliwości wydania reszty?

Aby policzyć drogi od A do B , które przechodzą przez co najmniej jedno wyróżnione skrzyżowanie, weźmy pod uwagę jakkolwiek z takich dróg i niech R będzie pierwszym wyróżnionym skrzyżowaniem na tej drodze. Rozważmy odbicie odcinka drogi od A do R względem linii wyznaczonej przez wyróżnione skrzyżowania, tak jak pokazano:



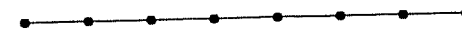
(Zobacz również zadanie 10 na stronie 141.)

Rozdział 2

- (ii) Na ile sposobów można wybrać m spośród krawędzi grafu K_n ?
- (iii) Ile jest podzbiorów zbioru krawędzi grafu K_n ?
- Policzyć końce krawędzi. Aby otrzymać bardziej formalne uzasadnienie, zastosować indukcję względem liczby krawędzi. (Wynik ten jest nazwany „lematem o uściskach dłoni”, ponieważ tak naprawdę stwierdza on, że w trakcie dowolnego powitania ogólna liczba podawanych sobie rąk jest równa podwojonej liczbie faktycznie dokonanych powitań).
- (i) Indukcja względem liczby wierzchołków. (Jeżeli $|V| > 1$, to istnieje wierzchołek stopnia 1, którego usunięcie daje mniejsze drzewo).
(ii) Założyć, że spójny graf $G = (V, E)$ spełnia $|E| = |V| - 1$, ale że G nie jest drzewem. Wówczas G ma cykl i usunięcie dowolnej krawędzi z cyklu pozostawi graf spójnym. Jeżeli ten nowy graf w dalszym ciągu zawiera cykl, to należy powtórzyć

postępowanie, itd. Po usunięciu pewnych $k (> 0)$ krawędzi otrzymamy drzewo. Dla czego jest to sprzeczne z (i)?

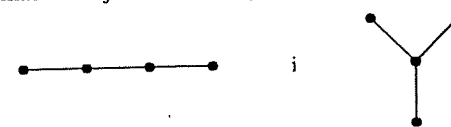
- (ii) Stopniami będą $n - 2, 2, 1, \dots, 1$. W ten sposób, dla $n > 4$, należy wybrać jedyny wierzchołek i mający stopień $n - 2$, jedyny wierzchołek j , z którym i nie jest połączony, oraz wierzchołek k , z którym jest połączony j .
- (iii) Drzewo musi wyglądać jak



(iv) Który wierzchołek jest połączony z 1? Na ile sposobów można utworzyć drzewo na zbiorze wierzchołków $\{2, \dots, n\}$?

Do ostatniej części można zastosować fakt, że $(1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow \frac{1}{e}$.

- (i) W C_nH_{2n+2} jest $3n + 2$ wierzchołków, z których n ma stopień 4, a pozostałe stopień 1. Ile wynosi suma stopni oraz ile krawędzi ma ten spójny graf? Następnie wykorzystać zadanie 4 (ii), aby pokazać, że cząsteczkowa struktura jest drzewem.
Dla C_nH_{2n} podobne przeliczenie stopni i krawędzi pokazuje, że taka struktura nie jest drzewem.
- (ii) W C_4H_{10} cztery atomy węgla i ich połączenia tworzą drzewo na czterech nieoznaczonych wierzchołkach. Jak już widzieliśmy, są tylko dwa takie drzewa, mianowicie



Podobnie atomy węgla w C_3H_8 i C_5H_{12} tworzą drzewa na trzech i pięciu nieoznaczonych wierzchołkach.

- Dla prawej nierówności pokazać, że jeżeli dwie ze składowych są grafami pełnymi na m i n wierzchołkach, gdzie $2 \leq m \leq n$, to wówczas w składowych będących grafami pełnymi na $m - 1$ i $n + 1$ wierzchołkach mamy więcej krawędzi. Jak więc można zmaksymalizować liczbę krawędzi, gdy jest zadana liczba wierzchołków i liczba składowych?

Rozdział 3

- (i) Założyć, że $x, y \in B_1$, gdzie $x \neq y$ i wywnioskować w następujący sposób sprzeczność. Rodziny

$$(B_1 \setminus \{x\}, B_2, \dots, B_n) \quad \text{i} \quad (B_1 \setminus \{y\}, B_2, \dots, B_n)$$

nie spełniają własności typu Halla, a więc wykazać, że istnieją $I_1, I_2 \subseteq \{2, \dots, n\}$, takie że

$$\left| (B_1 \setminus \{x\}) \cup \left(\bigcup_{i \in I_1} B_i \right) \right| = |I_1| \quad \text{i} \quad \left| (B_1 \setminus \{y\}) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} B_i \right) \right| = |I_2|$$

Wywnioskować, że

$$B_1 \setminus \{x\} \subseteq \bigcup_{i \in I_1} B_i \quad \text{i} \quad B_1 \setminus \{y\} \subseteq \bigcup_{i \in I_2} B_i \quad \text{i} \quad B_1 \subseteq \bigcup_{i \in I_1 \cup I_2} B_i$$

Wiemy również, że

$$\left| \bigcup_{i \in I_1 \cap I_2} B_i \right| \geq |I_1 \cap I_2|$$

Pamiętając, że w ogólnym przypadku $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, wykazać, że zbiór $I = \{1\} \cup I_1 \cup I_2$ przeczy faktowi, że $\mathfrak{B}$ ma własność typu Halla.

3. (i) *Rozpocznijmy nasz dowód małżeńskiej wersji twierdzenia Halla od pożenienia chłopca C z jedną z dziewcząt, która go zna. W dalszej metodzie wyszukiwania naręczonych dla wszystkich dziewcząt, przetasowujemy istniejące zaręczone pary w taki sposób, że w każdym kroku C będzie z kimś zaręczony.*
 (ii) W tej nowej sytuacji jest m dziewcząt oraz m chłopców i można bezpośrednio sprawdzić, że dowolnych r dziewcząt zna co najmniej r chłopców. Tak więc, na mocy twierdzenia Halla, *wszystkie* dziewczyny i *wszyscy* chłopcy mogą kogoś poślubić: która dziewczyna wyjdzie za mąż za C ?
 (iii) Warunek w ostatnim twierdzeniu jest fałszywy dla $|P| = 1$ tylko wtedy, gdy $|P \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i)| = 1$ i $n - |I| = 0$, a to jest niemożliwe.
4. Zaprośmy dodatkowo $n - k$ bardzo popularnych chłopców, znanych wszystkim dziewczętom. Pokazać, że co najmniej k dziewcząt może znaleźć mężów w wyjściowej sytuacji wtedy i tylko wtedy, gdy *wszystkie* dziewczęta mogą znaleźć mężów w nowej sytuacji. Zastosować do nowej sytuacji twierdzenie Halla.
5. Indukcja względem n . Mając danych n dziewcząt spełniających warunki typu Halla, rozważmy sytuację pierwszej dziewczyny. Jeżeli może ona wyjść za mąż za dowolnie wybranego chłopca spośród tych, których zna ($\geq m$ możliwości), i w dalszym ciągu pozostaje zbiór „wolnych” dziewcząt i chłopców spełniający warunki typu Halla, to na mocy indukcji otrzymujemy łatwo rezultat. Jeżeli jednak wychodząc za mąż za jednego z chłopców, których zna, stworzyłaby sytuację nie spełniającą warunków typu Halla, to w wyjściowym stanie musi być n' ($m \leq n' \leq n$) dziewcząt, znających dokładnie n' chłopców. Wydając za mąż n' dziewcząt, tych n' musi poślubić wspomnianych n' chłopców, których znają, i na mocy założenia indukcyjnego ich mężowie mogą być wybrani na co najmniej $m!$ sposobów.
6. Wyobraźmy sobie m chłopców i n dziewcząt. Niech 1 stojąca w i -tym wierszu i j -tej kolumnie macierzy M oznacza, że j -ta dziewczyna zna i -tego chłopca.
7. Weźmy dowolnych r zbiorów w $\mathfrak{A}$. Wypiszmy wszystkie ich elementy (włączając powtórzenia), otrzymując co najmniej rd elementów na tej liście. Żaden element nie występuje na niej więcej niż d razy. Musi być więc co najmniej r różnych elementów na tej liście.
10. Aby pokazać, że dowolna bistochastyczna macierz M może być przedstawiona w postaci zadanej sumy, zastosujemy indukcję względem liczby, γ , nie zerowych pozycji w M (najmniejszym z możliwych przypadków jest $\gamma = n$). Teraz, jeżeli $\gamma > n$, to zastosujemy macierzową postać twierdzenia Halla, aby pokazać, że istnieje w M zbiór złożony z nie zerowych elementów, po jednym w każdym wierszu i kolumnie. Niech

λ_1 będzie najmniejszym spośród tych nie zerowych elementów i niech M_1 będzie macierzą permutacyjną z jedynekami umieszczonymi na tych nie zerowych pozycjach. Zastosować założenie indukcyjne do

$$\frac{1}{(1 - \lambda_1)} (M - \lambda_1 M_1)$$

11. Zdefiniujmy dwudzielny graf $G = (V_1, E, V_2)$, gdzie $V_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ oraz x_i jest połączony z y_j wtedy i tylko wtedy, gdy $X_i \cap Y_j \neq \emptyset$. Wówczas należy pokazać, że dowolnych r wierzchołków spośród x_i jest połączonych z co najmniej r wierzchołkami spośród y_i i zastosować twierdzenie Halla.
 (Podgrupa normalna skończonej grupy powoduje dekompozycję grupy na jej n lewostronnych warstw, wszystkie tej samej mocy, jak również na jej n prawostronnych warstw, wszystkie tej samej mocy. Na podstawie zadania 11 w grupie istnieje n elementów, które reprezentują jednocześnie lewostronne i prawostronne warstwy).

Rozdział 4

2. (i) Rozważyć „wspólnie zajmowane” szufladki

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \dots & \square \\ 1, 2n & 2, 2n-1 & 3, 2n-2 & & n, n+1 \end{array}$$

- (ii) Rozważyć „wspólnie zajmowane” szufladki, aby pokazać, że dwie spośród liczb są *kolejnymi* liczbami.
- (iii) Rozważyć szufladki

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \dots & \square \\ 1 & 3 & 5 & & 2n-1 \end{array}$$

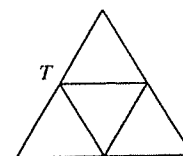
z liczbą umieszczoną w szufladce odpowiadającej jej największemu nieparzystemu czynnikowi.

3. Mając liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ utworzyć szufladki

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \dots & \square \\ 0 & 1 & 2 & & n-1 \end{array}$$

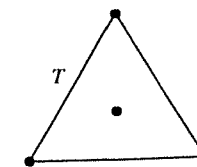
i włożyć każdą z liczb $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ do szufladki odpowiadającej reszcie z dzielenia tej liczby przez n .

4. (i)



pięć punktów w cztery zbiory

- (ii)



cztery punkty w trzy koła

5. Umieścić liczby 9, 99, 999, ... w takich samych szufladkach jak w powyższym zadaniu 3. (Alternatywnie można tego dowieść, rozważając rozwinięcie dziesiętne liczby $1/n$: porównać rozdział pierwszy w książce *Yet another introduction to analysis*, cytowanej w spisie literatury.)

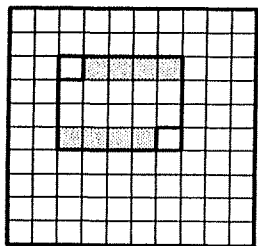
6. Zaniedbujemy oczywisty przypadek $k = 0$. Następnie bierzemy pod uwagę ilość piętniędy po i dniach (powiedzmy $= t_i$). Wszystkie $2n$ dodatnie liczby całkowite

$$t_1, t_2, \dots, t_n, \quad \text{wraz z} \quad k, k+t_1, k+t_2, \dots, k+t_{n-1}$$

są mniejsze od $2n$.

8. ($\Rightarrow$) Prosty test dwoistości nieparzysty/parzysty i czarny/biały.

($\Leftarrow$) Aby pokazać, że tablica może być pokryta, jeżeli n jest parzyste, oraz są usunięte jeden czarny i jeden biały kwadrat, wyobraźmy sobie najmniejszą prostokątną część tablicy zawierającą pozycje usuniętych kwadratów. Test dwoistości pokazuje, że będzie to prostokąt o jednym boku zawierającym parzystą liczbę kwadratów i drugim boku zawierającym nieparzystą liczbę kwadratów:



W ogólności łatwo jest wypełnić zacieniowaną część, następnie pozostałe kwadraty prostokąta, a potem pozostałą część tablicy.

10. Wyobraźmy sobie każdą cegielkę jako czarny sześciąt o boku 1 dostawiony do białego sześciąt o boku 1.

11. (i) Cykl Hamiltona będzie postaci

$$\underbrace{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1}_{\substack{\in V_1 \in V_2 \in V_1 \in V_2 \\ \text{wszystkie wierzchołki występują tutaj} \\ \text{dokładnie jeden raz}}}$$

- (ii) Skoczek porusza się zawsze z kwadratu czarnego na biały lub na odwrót.

15. (iii) Rozważmy n^m funkcji jako obiekty i niech „własność i ” oznacza, że funkcja f nie przyjmuje żadnej wartości $f(j)$ równej i . Wówczas, dla przykładu: $N(1, 2, \dots, r)$ jest liczbą funkcji z $\{1, \dots, m\}$ do $\{r+1, r+2, \dots, n\}$, która, na mocy (i), wynosi $(n-r)^m$.

Rozdział 5

2. Dodanie następnego wiersza do prostokąta łacińskiego wymiaru $p \times n$ o elementach ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ jest równoznaczne z wybraniem kolejnych różnych reprezentantów z n zbiorów, z których każdy ma $n-p$ elementów: na mocy zadania 5 z rozdziału 3 można to uczynić na co najmniej $(n-p)!$ sposobów.

4. Jeżeli $N \geq p+q$, to $L(i) \geq p+q-N$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, N\}$, (przypadek $N \geq n$ jest, oczywiście, również potrzebny).

6. (ii) Przeformułować po prostu dowód ze stron 75–77. Jeżeli na przykład $k(i-i')$ jest podzielne przez n , gdzie k oraz n są względnie pierwsze, to $i-i'$ jest podzielne przez n .

7. Załóżmy, że jest p punktów. Wówczas dowolny określony punkt x może być połączony w parę z dowolnym spośród $p-1$ pozostałych punktów i każda taka para będzie leżała na dokładnie jednej linii. Ale również x leży na $n+1$ liniach i jest połączony w pary z n innymi punktami, leżącymi na każdej linii. Policzmy teraz, dwoma różnymi sposobami, ogólną liczbę par zawierających x , biorąc pod uwagę wszystkie linie.

Ponieważ każdy punkt leży na $n+1$ liniach, a każda linia zawiera $n+1$ punktów, jest od razu jasne, że liczba linii jest też równa p .

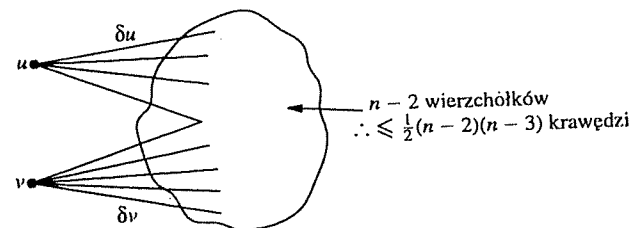
Rozdział 6

3. Indukcja względem $p = \frac{1}{2}k$. Jeżeli $p > 1$, to utworzyć nowy graf przez usunięcie wszystkich krawędzi „najdłuższego” szlaku P (tzn. tego, który ma najwięcej krawędzi), zaczynającego się i kończącego w wierzchołkach nieparzystego stopnia. Następnie, do nietrywialnych składowych tego nowego grafu, zastosować założenie indukcyjne.

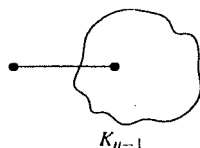
5. Wykorzystać test dwoistości, by pokazać, że d jest parzyste. Pokazać również, że jeżeli wierzchołki u i v nie są połączone, to istnieje wierzchołek w taki, że uw i vw należą do zbioru krawędzi. (W rzeczywistości dla $d > 0$ graf G jest również hamiltonowski, ale jest to o wiele trudniejszy do pokazania wynik, otrzymany przez C. St. J. A. Nash-Williamsa w 1969 r. Ten i pokrewne rezultaty są omawiane w książce *Graph theory and related topics*, pod redakcją J. A. Bondy'ego i U. S. R. Murty'ego. Zadanie 11 zawiera łatwiejszy do udowodnienia rezultat, że G jest „sęmi-hamiltonowski”).

9. Niech n wierzchołków grafu reprezentuje n egzaminów. Połączyć dwa wierzchołki krawędzią, jeżeli egzaminy te są ustalone przez różnych egzaminatorów.

10. Rozważyć dowolną, nie połączoną parę wierzchołków u i v :



Dla kontrprzykładu rozważyć

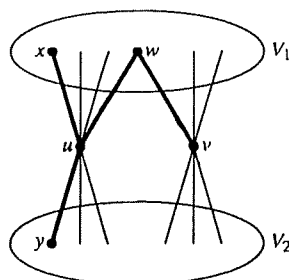
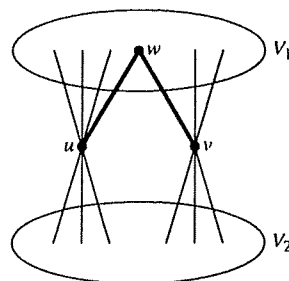


11. Pokazać, że G jest spójny. Wówczas niech $|V| = n$ i niech $v_1, \dots, v_r$ będzie najdłuższą ścieżką w G . Założyć, że $r < n$ i doprowadzić do sprzeczności, stosując następujące podejście: v_1 jest połączony tylko z wierzchołkami spośród $\{v_2, \dots, v_r\}$ oraz v_r jest połączony tylko z wierzchołkami spośród $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$. Ponadto $\delta v_1 + \delta v_r \geq r$. Tak więc stosując argumentację bardzo podobną do tej z dowodu ze strony 92, otrzymujemy, że istnieje w G cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki $v_1, \dots, v_r$. Mając ten cykl i biorąc pod uwagę to, że G jest spójny, można znaleźć w G ścieżkę zawierającą $r + 1$ wierzchołków, co jest sprzeczne z wyborem r .

12. (ii) Założyć, że G nie jest grafem pełnym i słabszą wersję zadanych warunków, mianowicie, że $G \setminus \{u\}$ jest zawsze spójny, ale gdy różne wierzchołki u, v i w są takie, że $uw, vw \in E$ oraz $uv \notin E$, to $G \setminus \{u, v\}$ nie jest spójny. Należy pokazać, że dla dowolnych trzech takich wierzchołków zachodzi $\delta w = 2$ (a następnie, że wszystkie wierzchołki mają stopień 2).

Niech V_1 i V_2 będą zbiorami wierzchołków, na które rozspójnia się graf $G \setminus \{u, v\}$ i załóżmy, że $w \in V_1$, tak jak to pokazano. Jeżeli $V_1 \neq \{w\}$ oraz x, y są takie jak na rysunku, to wówczas $xu, yu \in E$ i $xy \notin E$, a więc, na mocy zadanych warunków, graf $G \setminus \{x, y\}$ jest niespójny. Wierzchołek u należy do jednej z jego składowych: niech z będzie wierzchołkiem należącym do drugiej składowej. Ponieważ $G \setminus \{x\}$ i $G \setminus \{y\}$ są spójne, a $G \setminus \{x, y\}$ nie jest, więc istnieje w G szlak od z do u , przechodzący przez y , ale nie przez x , jak również istnieje szlak przechodzący przez x , ale nie przez y . Jednakże wszystkie szlaki od z do u przechodzą przez x lub y . Gdzie jest więc z ?

Jeżeli jest on w V_1 , to szlak od z do u , omijający x , musi przechodzić przez v . Ale wówczas szlak ten może prowadzić od z do v, w i dalej do u , omijając oba x i y . W konsekwencji $z \notin V_1$. Podobny argument pokazując, że $z \notin V_2$. Wynioskować z tego, że $V_1 = \{w\}$ i że $\delta w = 2$.



Rozdział 7

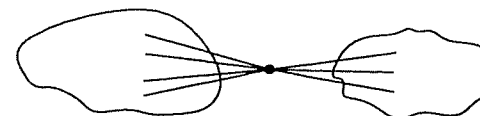
2. Jeżeli graf składa się tylko z jednego wierzchołka, to obie konkluzje można otrzymać natychmiast. W przeciwnym razie $d > 0$ i istnieje jeden wierzchołek, powiedzmy v ,

którego stopień jest mniejszy niż d . Każdy z d kolorów musi być użyty przy każdym wierzchołku stopnia d .

(i) Rozważać jeden z kolorów nie występujący przy wierzchołku v .

(ii) Rozważać jeden z kolorów występujących przy wierzchołku v (być może nie ma żadnego).

3. G jest taki, jak pokazano poniżej; zastosować zadanie 2 (i twierdzenie Vizinga) do odpowiedniego podgrafu grafu G .



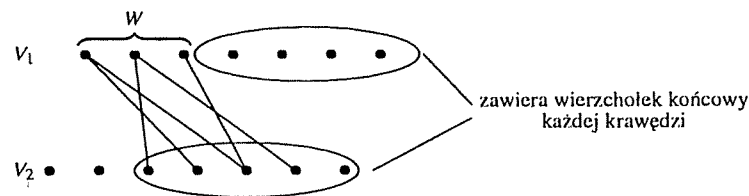
4. Graf musi mieć parzystą liczbę wierzchołków. Pokolorować na przemian krawędzie cyklu Hamiltona dwoma kolorami. W jaki sposób można pokolorować pozostałe krawędzie?
5. Pokolorować krawędzie odpowiedniego grafu dwudzielnego: każdy kolor „połączy” pewne pary.
6. Przedstawić macierz w postaci grafu dwudzielnego $G = (V_1, E, V_2)$, gdzie $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$, a następnie pokolorować krawędzie tego grafu. Każdy podgraf wyznaczony przez krawędzie tego samego koloru będzie miał inną macierz.

Rozdział 8

2. Policzyc zbiory złożone z trzech graczy, w których gracz i zwyciężył w obu grach.
3. Jeżeli liczba zwycięstw gracza i wynosi b_i , to liczba jego porażek jest równa $l_i = n - 1 - b_i$. Ale porażki $l_1, l_2, \dots, l_n$ są wynikami innego turnieju.
4. (i) $\Rightarrow$ (ii). Wiemy, że turniej zawiera skierowany szlak $p_1, \dots, p_n$. Ponadto, jeżeli zachodzi (i), to istnieje krawędź skierowana od p_n do jakiegoś innego p_i , a więc istnieje skierowany cykl: niech $p'_1, \dots, p'_r, p'_1$ będzie największym takim cyklem. Jeżeli istnieje gracz nie występujący w tym cyklu, powiedzmy p , to czy jest możliwe dołożenie go (i być może innych) w pewne miejsce cyklu, by otrzymać większy cykl $p'_1, \dots, p'_{i-1}, p, p'_i, \dots, p'_r, p'_1$?
- (ii) $\Rightarrow$ (iii). Jeżeli zachodzi (ii), to w dowolnym właściwym podzbiore złożonym z r graczy będzie co najmniej jeden, który pokonał jednego z pozostałych $n - r$ graczy.
- (iii) $\Rightarrow$ (i). Jeżeli (i) nie zachodzi, to graczy można podzielić na dwa zbiory P_1 i P_2 w ten sposób, że żaden gracz z P_1 nie pokonał żadnego gracza z P_2 . Ale wówczas wyniki dla graczy z P_1 nie będą spełniały (iii).
6. Jednym ze sposobów jest zastosowanie kolorowania krawędzi, gdzie różne dni są przedstawione za pomocą różnych kolorów.

Rozdział 9

- Niech $V_1 = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ oraz $V_2 = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ i zdefiniujmy zero-jedynkową macierz M wymiaru $m \times n$, stosując zasadę, że (i, j) -ty wyraz ma wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy r_i jest połączony w grafie G z c_j . Co jest odpowiednikiem skojarzenia w G w tej macierzy? Co jest odpowiednikiem zbioru wierzchołków, wśród których jest wierzchołek końcowy każdej krawędzi, w tej macierzy?
- Na podstawie zadania 1 możemy policzyć zamiast tego minimalną liczbę wierzchołków, wśród których jest zawarty co najmniej jeden wierzchołek końcowy każdej krawędzi grafu G . Ale dla danego $W \subseteq V_1$ zbiór $V_1 \setminus W$ jest częścią takiego zbioru wierzchołków wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór ten zawiera także $j(W)$:



Jeżeli więc szukamy najmniejszego takiego zbioru, to potrzebujemy tylko rozważyć zbiory postaci $(V_1 \setminus W) \cup j(W)$, dla $W \subseteq V_1$.

- Pokazać, że jeżeli zero-jedynkowa macierz M wymiaru $m \times n$ ma własność typu Halla, że „w każdych r wierszach są jedynki w co najmniej r kolumnach”, to m jest najmniejszą liczbą linii w macierzy M zawierającą wszystkie jedynki. Następnie zastosować twierdzenie Königa-Egerváry’ego, aby wywnioskować macierzową postać twierdzenia Halla.
- Mając dany graf $G = (V, E)$, zdefiniować sieć $N = (V, c)$, przyjmując, że $c(uv)$ ($= c(vu)$) ma wartość 1, jeżeli u oraz v są połączone w grafie G , natomiast w przeciwnym razie, ma wartość 0. Pokazać, że minimalny przekrój w N rozdzielający x od y nigdy nie użyje obu krawędzi uv oraz vu . Wywnioskować, że minimalny zbiór krawędzi w G rozdzielający x od y odpowiada minimalnemu przekrojowi w N . Pokazać również, że zbiór złożony z n krawędziowo-rozłącznych ścieżek z x do y w grafie G odpowiada przepływowi o wartości n w N , który nie używa obu krawędzi uv oraz vu . Następnie zastosować do N twierdzenie „maksymalny przepływ-minimalny przekrój”.

Rozdział 10

- (i) W jaki sposób akceptowalne ciągi długości $n - 1$ mogą być rozszerzone do akceptowalnych ciągów długości n ?

$c_n =$ (liczba ciągów długości $n - 1$ kończących się 0
i następującym po nim 0, 1 lub 2)
+ (liczba ciągów długości $n - 1$ kończących się 1
i następującym po niej 0 lub 2)
+ (liczba ciągów długości $n - 1$ kończących się 2
i następującym po niej 0 lub 1)

A ile spośród c_n ciągów kończy się zerem?

- $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^{y_1} x^{y_2} \dots x^{y_k} = x^n$. Stąd żądana liczba rozwiązań jest równa liczbie wystąpień x^n w wyrażeniu

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)}_{\text{zliczający } y_1} \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)}_{\text{zliczający } y_2} \dots \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)}_{\text{zliczający } y_k}$$

- (i) Podobnie jak we wskazówce do zadania 5 z jedyną różnicą, że za każdym razem, gdy otrzymujemy podział liczby n na dodatnie liczby całkowite $y_1 + y_2 + \dots + y_k$, mamy dokładnie $y_1 y_2 \dots y_k$ wyrażeń x^n w rozwinięciu:

$$\underbrace{(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}_{\text{zliczający } y_1} \underbrace{(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}_{\text{zliczający } y_2} \dots \underbrace{(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}_{\text{zliczający } y_k}$$

- (ii) Podział uczniów na grupy jest tym samym, co znalezienie rozwiązania $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n$, po czym wybranie liderów może być dokonane na $y_1 y_2 \dots y_k$ sposobów; tak więc problem sprowadza się do tego z punktu (i). Aby zilustrować jeden z możliwych bezpośrednich argumentów, rozważmy przykład siedmiu uczniów ($\times$) w trzech grupach, z podziałami między grupami oznaczonymi przez $|$ i z liderami umieszczonymi w kółkach; wówczas zastąpmy wszystkie $|$ i $\times$ w kółkach kreskami poziomymi: np.

$$\begin{array}{ccccccc} \times & \otimes & | & \times & \otimes & \times & | & \otimes & \times \\ \rightarrow & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times \end{array}$$

Dla n uczniów w k grupach istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność między wyborami grup/liderów a ciągami, złożonymi z $n - k$ iksów i $2k - 1$ kresek poziomych umieszczonych w dowolnym porządku.

- Jest jasne, że dla $i < j$ (i, j) -ty wyraz w macierzy MN jest równy zero. Dla $i \geq j$ wyraz ten może być zapisany w postaci

$$\binom{i}{i-j} \binom{j}{0} - \binom{i}{i-j-1} \binom{j+1}{1} + \binom{i}{i-j-2} \binom{j+2}{2} - \dots + (-1)^{i-j} \binom{i}{i-j} \binom{j}{i-j}$$

co jest współczynnikiem przy x^{i-j} w

$$\underbrace{\left(\binom{i}{0} + \binom{i}{1}x + \binom{i}{2}x^2 + \dots + \binom{i}{j}x^j + \dots\right)}_{(1+x)^i} \times \underbrace{\left(\binom{j}{0} - \binom{j+1}{1}x + \binom{j+2}{2}x^2 - \binom{j+3}{3}x^3 + \dots\right)}_{(1+x)^{-(j+1)}}$$

A czym jest współczynnik przy x^{i-j} w $(1+x)^{i-j-1}$?

8. Jest $\binom{n}{r}$ funkcji z $\{1, 2, \dots, m\}$ do $\{1, 2, \dots, n\}$, których zbiór obrazów zawiera dokładnie r elementów. Wówczas, zapisując zadany rezultat w postaci m równości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{1}{1}s_1 &= 1^m \\ \binom{2}{1}s_1 + \binom{2}{2}s_2 &= 2^m \\ \vdots & \\ \binom{m}{1}s_1 + \binom{m}{2}s_2 + \dots + \binom{m}{m}s_m &= m^m \end{aligned}$$

Teraz należy zastosować inwersję.

10. Ile spośród tych górnych dróg dotyka przekątnej po raz ostatni po $2r$ krokach? Jest u_r sposobów osiągnięcia tego szczególnego, ostatniego punktu na przekątnej i v_{n-r} sposobów kontynuowania przejścia od tego miejsca, bez ponownego dotykania przekątnej. Tak więc jest $u_r v_{n-r}$ ($= u_r u_{n-r-1}$) takich dróg.

Dalej, dla $n > 1$ współczynnik przy x^n w $u(x)$ równa się współczynnikowi przy x^{n-1} w $(u(x))^2$ i można wyprowadzić żadaną równość.

Rozwiązaniem równania kwadratowego dla $u(x)$ jest

$$u(x) = \frac{1 - (1 - 4x)^{1/2}}{2x}$$

i u_n , będące współczynnikiem przy x^n w tym wyrażeniu, jest dane przez

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \dots \times \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \times (-4)^{n+1} \times \frac{1}{(n+1)!}$$

które jeszcze się redukuje.

12. Liczba sposobów otrzymania łącznie n oczek w rzucie dwoma tradycyjnymi kostkami jest współczynnikiem przy x^n w wyrażeniu

$$g(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 = x^2(1+x)^2(1-x+x^2)^2(1+x+x^2)^2$$

Jeżeli jedna z nowych kostek ma ścianki a, b, c, d, e i f (niekoniecznie różne), a druga ma ścianki a', b', c', d', e' i f' , to liczba sposobów otrzymania łącznie n oczek w rzucie dwiema nowymi kostkami jest współczynnikiem przy x^n w wyrażeniu

$$(x^a + x^b + x^c + x^d + x^e + x^f)(x^{a'} + x^{b'} + x^{c'} + x^{d'} + x^{e'} + x^{f'})$$

Każdy z tych czynników nie ma wyrazu wolnego i jego wartość wynosi 6, gdy $x = 1$. Musimy wyrazić $g(x)$ jako iloczyn dwóch takich czynników.

Rozdział 11

3. Rozważmy graf G , którego wierzchołki pokolorowano, używając $\chi(G)$ kolorów i weźmy pod uwagę którykolwiek z tych kolorów. Pokazać, że musi istnieć wierzchołek tego koloru, który jest połączony z wierzchołkami wszystkich pozostałych kolorów.

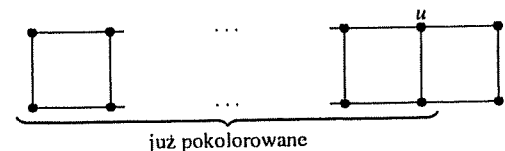
6. Niech $1, 2, \dots, \chi(G)$ będą kolorami użytymi do kolorowania wierzchołków w G i niech $1', 2', \dots, \chi(\bar{G})'$ będą kolorami użytymi do kolorowania wierzchołków w $\bar{G}$. Wówczas należy użyć $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G})$ „kolorów” $(1, 1'), (1, 2'), \dots, (i, j'), \dots, (\chi(G), \chi(\bar{G})')$ do pokolorowania wierzchołków grafu pełnego na zbiorze V — dotyczy to pierwszej części zadania.

Jeśli chodzi o drugą część, założmy, że wynik jest fałszywy i niech $G = (V, E)$ będzie najmniejszym grafem, dla którego ta własność nie zachodzi. Niech $v \in V$ i niech G' będzie otrzymanym z G przez usunięcie wierzchołka v (wraz ze wszystkimi do niego dochodzącymi krawędziami). Pokazać, że

$$\chi(G) = \chi(G') + 1, \quad \chi(\bar{G}) = \chi(\bar{G}') + 1 \quad \text{oraz} \quad \chi(G') + \chi(\bar{G}') = |V|$$

Pokazać także, że stopień wierzchołka v w grafie G jest równy co najmniej $\chi(G')$, a w $\bar{G}'$ co najmniej $\chi(\bar{G}')$. Następnie wywnioskować sprzeczność.

9. Nie stosować standardowej metody, opartej na zależności rekurencyjnej. Zamiast tego niech G' będzie K_5 z usuniętą krawędzią uv . Ile jest sposobów, by pokolorować wierzchołki grafu G' k kolorami z u i v tego samego/różnego koloru? Następnie połączyć obie kopie grafu G' , otrzymując interesujący nas graf G .
10. Niech G_3 (odpowiednio G_4) będzie grafem pełnym K_{n-1} (odpowiednio K_n) z usuniętą jedną krawędzią. Zastosować do grafów G_1, G_2 i G_3 standardową zależność rekurencyjną (z dowodu twierdzenia na stronie 150), a następnie wyrazić $p_{G_1} - p_{G_2}$ w postaci wielomianu chromaticznego grafu pełnego.
12. Jeżeli $n > 1$ i wynik jest prawdziwy dla mniejszych grafów, to wiemy, ile jest sposobów, aby prawidłowo pokolorować pierwsze $2(n-1)$ wierzchołki. Ile natomiast mamy możliwości, aby pokolorować ostatnie dwa wierzchołki:
- (a) z u oraz v o różnych kolorach (jak pokazano) i
 - (b) z u oraz v tego samego koloru?



13. (i) Zastosować do grafu G_1 zwykłą zależność rekurencyjną.
(ii) Indukcja względem n . Jeżeli $n > 1$, to postępowanie z (i) da dwa grafy, do których może być zastosowane założenie indukcyjne.

14. Indukcja względem liczby m brakujących krawędzi. Jeżeli G ma $m > 0$ brakujących krawędzi, a G_1, G_2 są tymi grafami, co w twierdzeniu na stronie 150, to może być zastosowane do nich założenie indukcyjne.
15. Sprawdzić wynik dla grafów pełnych (patrz zadanie 5 na stronie 111), a następnie ponownie zastosować indukcję względem liczby brakujących krawędzi. Założyć, że G ma brakującą krawędź uv , i niech G_1 oraz G_2 będą grafami otrzymanymi w oczywisty sposób, odpowiednio przez dodanie i przez ściągnięcie uv . Pokazać, że każda acykliczna orientacja grafu G reprezentuje jeden z następujących typów:

albo skierowanie $u \rightarrow v$ utworzy jedną acykliczną orientację grafu G_1 , a skierowanie $v \rightarrow u$ utworzy inną

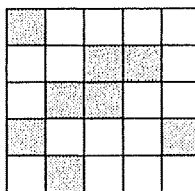
albo dokładnie jedno z uporządkowań krawędzi uv utworzy acykliczną orientację grafu G_1 .

Pokazać także, że liczba acyklicznych orientacji grafu G , typu przedstawionego po lewej stronie, równa się liczbie acyklicznych orientacji grafu G_2 , i wywnioskować, że

$$\left(\begin{array}{c} \text{liczba acyklicznych} \\ \text{orientacji grafu } G_1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{liczba acyklicznych} \\ \text{orientacji grafu } G_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{liczba acyklicznych} \\ \text{orientacji grafu } G \end{array} \right)$$

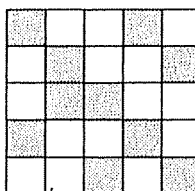
Rozdział 12

3. Żądana odpowiedź jest równa liczbie sposobów rozmieszczenia pięć nie atakujących się wzajemnie wież szachowych na nie zacieniowanej części przedstawionej tablicy:



Łatwo jest wyznaczyć wielomian szachowy zacieniowanej części tablicy (patrz odpowiedzi do zadań).

4. Ponownie żądana odpowiedź jest równa liczbie sposobów rozmieszczenia pięciu nie atakujących się wzajemnie wież szachowych na nie zacieniowanej części przedstawionej tablicy (i tym razem łatwo jest wyznaczyć wielomian szachowy zacieniowanej części tablicy):



6. W tym przypadku

$$r_B(x) = 1 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_{n-1}x^{n-1} + r_nx^n = r_B(x)$$

a więc

$$r_1 = \text{liczba kwadratów w } B = \text{liczba kwadratów w } \bar{B} = \frac{1}{2}n^2$$

Także

$$\underbrace{n! - (n-1)!r_1 + (n-2)!r_2 - \dots \pm 2!r_{n-2} \pm 1!r_{n-1} \pm 0!r_n}_{\text{parzyste}} = r_n$$

7. Indukcja względem n . Jeżeli $n > 1$ i wynik jest prawdziwy dla wartości mniejszych od n , to

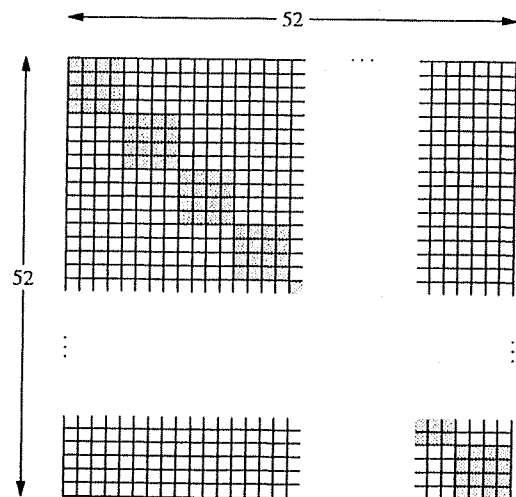
$$\begin{aligned} r_k &= (\text{liczba sposobów umieszczenia } k \text{ wież, w których} \\ &\quad \text{nie jest wykorzystany ostatni wiersz}) \\ &\quad + (\text{liczba sposobów umieszczenia } k \text{ wież, w których} \\ &\quad \text{jest wykorzystany ostatni wiersz}) \\ &= S(n, n-k) + (n-k+1)S(n, n-k+1) \end{aligned}$$

8. Oblicz dwoma różnymi metodami liczbę sposobów rozmieszczenia n nie atakujących się wzajemnie wież szachowych na tablicy wymiaru $n \times n$, z których k lub więcej leży na B , a następnie pokoloruj na czarno k spośród tych leżących na B .
9. (iii) Załóżmy, iż pierwsza talia jest uporządkowana w następujący sposób: W1, W2, D1, D2, K1, K2, A1, A2. Oznaczmy tablicę wymiaru 8×8 , tak jak pokazana:

	W1	W2	D1	D2	K1	K2	A1	A2
W1								
W2								
D1								
D2								
K1								
K2								
A1								
A2								

Wówczas każde spośród $8!$ tasowań drugiej talii odpowiada jednemu ze sposobów umieszczenia ośmiu nie atakujących się wzajemnie wież na przedstawionej tablicy; np. pokazane ustawienie odpowiada następującemu uporządkowaniu kart: K2, D2, A1, W1, W2, K1, A2, D1, w którym do „wojny” dojdzie między królami. Rozmieszczenia, które unikają wojen, są ściśle związane z tymi przeliczonymi w punkcie (ii).

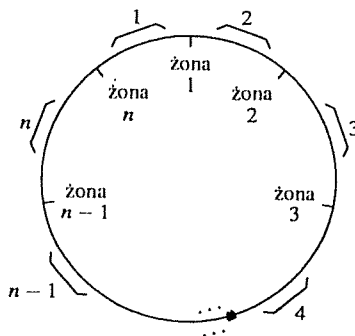
(iv) Tym razem musimy policzyć sposoby umieszczenia 52 nie atakujących się wzajemnie wież szachowych na przedstawionej nie zaciemnionej części tablicy wymiaru 52×52 :



10. (i) Można zastosować indukcję względem m wraz z tradycyjną metodą rekurencyjną, aby zredukować tablicę zawierającą m kwadratów do dwóch tablic, zawierających mniejszą liczbę kwadratów. Alternatywnie k wież szachowych, postawionych na zgiętozakowatym wierszu złożonym z m kwadratów, nie będzie atakowało się wzajemnie wtedy i tylko wtedy, gdy żadne dwie nie stoją na przyległych kwadratach: w zadaniu 5 na stronie 18 przeliczyliśmy takie rozstawienia.

(ii) Zastosować standardową metodę rekurencyjną do tej tablicy z wyszczególnionym kwadratem s' , tak jak ten w dolnym lewym narożniku: następnie zastosować (i).

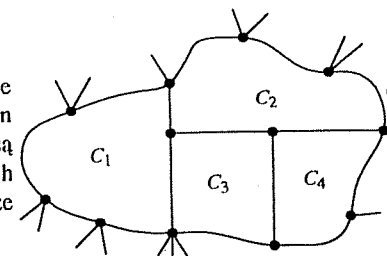
(iii) Niech pierwsza usiądzie żona 1: może ona wybrać dowolne spośród $2n$ miejsc. Ile jest wówczas sposobów wybrania miejsc dla pozostałych $n - 1$ żon? Po zajęciu przez nie swoich miejsc, oznaczmy pozostałe miejsca, jak zostało to pokazane. Ile teraz jest sposobów wybrania miejsc dla mężów? Tablica z punktu (ii) odgrywa tutaj istotną rolę.



Rozdział 13

2. W (ii) nie ma cykli o trzech krawędziach.

3. Rozważmy dowolny cykl C i załóżmy, że w danej planarnej reprezentacji zawiera on wewnątrz dokładnie te regiony, które są ograniczone cyklami $C_1, \dots, C_r$ (z których każdy ma parzystą długość). Pokazać, że liczba krawędzi w C jest parzysta.



6. (ii) Jeżeli oba grafy $G = (V, E)$ oraz $\bar{G} = (V, \bar{E})$ są planarne, gdzie $|V| = n$ (≥ 3), to

$$|E| \leq 3n - 6 \quad \text{ i } \quad |\bar{E}| \leq 3n - 6$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy równanie kwadratowe zmiennej n . Alternatywnie, przeformułować ten rezultat, stosując pojęcie grubości grafu i wykorzystując zadanie 5. (W rzeczywistości $t(K_n) = \lfloor \frac{1}{6}(n+7) \rfloor$, dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n , z wyjątkiem $n = 9$ oraz 10 . Dowód tego, że $t(K_9) > 2$ jest dość techniczny; można go znaleźć, na przykład, w pracy W. T. Tutte'a w *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 6, 1963).

7. Zauważmy, że na obwodzie tej figury jest n wierzchołków, (z których każdy ma stopień $n - 1$) oraz $\binom{n}{4}$ innych wierzchołków (z których każdy ma stopień 4): policzyć krawędzie, sumując stopnie wierzchołków.

8. (i) Niech x będzie liczbą regionów ograniczonych czterema krawędziami i niech y będzie liczbą regionów ograniczonych sześcioma krawędziami. Wówczas

$$x + y = |E| - |V| + 2$$

$$2|E| = 4x + 6y \quad (\text{dając } |E| = 3(x + y) - x)$$

i

$$2|E| = 3|V|$$

Równania te mają wiele rozwiązań, lecz w każdym z nich $x = 6$.

10. Zauważmy, że

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \delta_v = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n v_n \quad \text{ i } \quad |V| = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

podstawmy te wartości do nierówności $|E| \leq 3|V| - 6$.

Dla drugiej części zauważmy, że dla grafów spójnych

$$5(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) \geq 5v_1 + 4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 \geq \sum_{n=1}^{\infty} (6 - n)v_n \geq 12$$

11. Jeżeli $|V| > 6$ oraz wynik jest prawdziwy dla mniejszych grafów, to rozważyć graf otrzymany przez usunięcie wierzchołka mającego stopień mniejszy od 6.

12. Niech f będzie liczbą regionów. Wówczas

$$f = |E| - |V| + 2 \quad \text{ i } \quad 2|E| = cf = d|V|$$

Podzielić lewą równość przez $2|E|$.

13. Gra zawsze musi mieć swój koniec, nawet jeżeli odrzucimy założenie planarności (ale byłaby to o wiele mniej interesująca gra!). Rzeczywiście, jeżeli mamy już n wierzchołków oraz m krawędzi, to jaka jest największa liczba krawędzi, które możemy dodać do tych wierzchołków, nie tworząc żadnego stopnia większego od 3? Rozważyć konsekwencje następnego ruchu i pokazać, że w każdej kolejce liczba „brakujących krawędzi” redukuje się o 1.

Rozdział 14

1. Nierówności

$$|E| - |V| + 2 \leq 11$$

$$2|E| \geq 3|V|$$

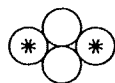
$$2|E| \geq 5(|E| - |V| + 2)$$

prowadzą do sprzeczności.

Zastosować indukcję względem liczby krawędzi. W kroku indukcyjnym rozważyć region ograniczony przez trzy lub cztery krawędzie i zredukować mapę, tak jak zrobiliśmy to w dowodzie na stronie 189. Region o czterech bokach może być zredukowany tak jak w tym dowodzie, a region o trzech bokach może być zastąpiony punktem.

2. W dowodzie przez indukcję rozważyć położenie dwóch monet, które są najbardziej oddalone od siebie i pokazać, że każda z nich będzie się stykała z najwyżej trzema innymi monetami.

Aby znaleźć ułożenie monet, dla którego trzy kolory nie wystarczą, zauważmy, że jeśli dla układu

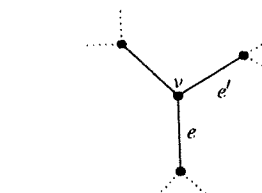


użyte są tylko trzy kolory, to dwie monety oznaczone gwiazdką mogą mieć ten sam kolor. Można połączyć takie grupy monet, otrzymując ułożenie, w którym będzie konieczny czwarty kolor.

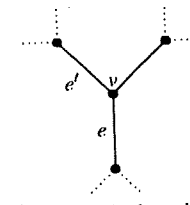
3. Pokazać, że funkcja p istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie odpowiadającego grafu mogą być pokolorowane trzema kolorami.

($\Rightarrow$) Założyć, że p istnieje. Rozpocząć od dowolnej krawędzi, nadając jej etykietę '1'. Następnie etykietować kolejno wszystkie krawędzie (przyporządkowując pewnym krawędziom kilka etykiet), stosując zasadę, że jeżeli e ma etykietę l oraz e' jest krawędzią, która ma z e wspólny wierzchołek v , to krawędzi e' należy przypisać

etykietę w następujący sposób:



$e \rightarrow e'$ zgodnie ze wskazówkami zegara, dookoła regionu: przyporządkować e' etykietę $l + p(v)$.

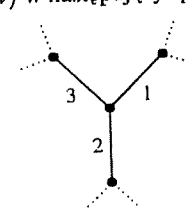


$e \rightarrow e'$ przeciwnie do wskazówek zegara, dookoła regionu: przyporządkować e' etykietę $l - p(v)$.

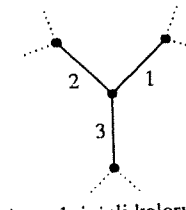
Pokazać, że otrzymujemy w ten sposób kolorowanie krawędzi grafu trzema „kolorami”

$$\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}, \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

($\Leftarrow$) Przy danym pokolorowaniu krawędzi grafu trzema kolorami 1, 2 oraz 3, wynika, że przy dowolnym wierzchołku v jest jedna krawędź każdego koloru. Zdefiniujemy $p(v)$ w następujący sposób:



$p(v) = 1$, jeżeli kolory 1, 2, 3 występują na mapie zgodnie ze wskazówkami zegara dookoła v



$p(v) = -1$, jeżeli kolory 1, 2, 3 występują na mapie przeciwnie do wskazówek zegara dookoła v

4. Porównać z zadaniem 6 w rozdziale 11 i wzorować się na tamtym rozwiązaniu. W szczególności, z ostatniego twierdzenia rozdziału 14 wynika, że jeżeli $\bar{G}$ jest planarny, to

$$\chi(G \cup \bar{G}) \leq \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq 5\chi(G)$$

Rozdział 15

2. Rozważyć nowe bloki, które są dopełnieniami zadanych bloków i wyznaczyć liczbę tych nowych bloków, które zawierają każdą parę punktów.

3. (ii) Policzyć, na dwa różne sposoby, wystąpienia elementów z B w innych blokach.
(iii) Policzyć, na dwa różne sposoby, wystąpienia par elementów z B w innych blokach.

4. Wykorzystać podstawowe zależności między parametrami, aby uprościć $k + \lambda(v - 1)$. Wówczas, jeżeli M jest macierzą incydencji konfiguracji, mamy

$$\underbrace{(\det M)^2}_{\text{kwadrat}} = \det(M^T M) = \underbrace{(k + \lambda(v - 1))}_{\text{kwadrat}} \underbrace{(k - \lambda)^{v-1}}_{\text{kwadrat}}$$

5. Usunąć całą linię ze skończonej płaszczyzny rzutowej rzędu n .
6. Jeżeli takie postępowanie tworzy konfigurację, to (wykorzystując wyniki o drzewach z rozdziału 2) trzy parametry będą miały postać

$$v = \frac{1}{2}n(n-1), \quad b = n^{n-2}, \quad k = n-1$$

Wówczas wyznaczyć parametr λ i pokazać, że dla $n > 3$ nie może on być liczbą całkowitą.

10. (i) Zauważyć, że gdy $n \geq 2$, to dla dowolnej macierzy M wymiaru $n \times n$, mamy

$$\det \left(M + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right) = \det \left(M - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right) = 2 \det M'$$

gdzie M' jest macierzą wymiaru $(n-1) \times (n-1)$, otrzymaną z M przez usunięcie pierwszego wiersza i pierwszej kolumny. Teraz łatwo jest pokazać żądany wynik, stosując indukcję względem n .

(ii) Niech Q będzie macierzą otrzymaną z P przez usunięcie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, niech p będzie ostatnią kolumną w macierzy P , z usuniętym ostatnim wyrazem, i niech D będzie macierzą taką jak w (i). Rozwiązać równania

$$(Q + D) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{43} \end{pmatrix} = -p$$

(iv) Gdyby istniały takie liczby wymierne, to musiałyby istnieć liczby całkowite a , b oraz c , nie mające wspólnego dzielnika i takie, że

$$6a^2 = b^2 + c^2$$

Lecz wówczas, biorąc pod uwagę reszty z dzielenia kwadratów liczb przez 3, można od razu wywnioskować, że b oraz c (a więc również a) są podzielne przez 3.

(v) Zauważmy najpierw, że

$$P^T P = \left(\frac{1}{6} N L^T \right) \left(\frac{1}{6} L N^T \right) = \frac{1}{6} N N^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Następnie wykorzystać fakt, że

$$6(y_1 \dots y_{43} y) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{43} \\ y \end{pmatrix} = 6(x_1 \dots x_{43} 1) P^T P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{43} \\ 1 \end{pmatrix}$$

i uprościć te iloczyny (ten po prawej stronie zawiera $(x_1 + \dots + x_{43})^2$).

12. Niech tych b elementów należy do $k_1, \dots, k_b$ spośród tych zbiorów. Policzyc wystąpienia elementów w parach zbiorów, otrzymując

$$\frac{1}{2}v(v-1) = \sum_{i=1}^b \frac{1}{2}k_i(k_i-1)$$

Następnie wykorzystać fakt, że k_i sumują się do vr i że suma ich kwadratów osiąga minimum wtedy (i tylko wtedy), gdy każdy przyjmuje średnią wartość vr/b . (Użyliśmy takiej notacji, by pokazać dualność, mianowicie, że w tym przypadku macierz incydencji zbiorów jest macierzą transponowaną macierzy incydencji dla (v, b, r, k, λ) konfiguracji).

13. Niech M będzie macierzą wymiaru $b \times v$, której wiersze składają się z b słów kodowych. Pokazać, że dowolne dwa wiersze macierzy M mają jedynki na $k - \frac{1}{2}d$ miejscach i wywnioskować, że MM^T jest macierzą wymiaru $b \times b$

$$\begin{pmatrix} k & k - \frac{1}{2}d & k - \frac{1}{2}d & \dots & k - \frac{1}{2}d \\ k - \frac{1}{2}d & k & k - \frac{1}{2}d & \dots & k - \frac{1}{2}d \\ k - \frac{1}{2}d & k - \frac{1}{2}d & k & \dots & k - \frac{1}{2}d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k - \frac{1}{2}d & k - \frac{1}{2}d & \dots & k - \frac{1}{2}d & k \end{pmatrix}$$

o dodatnim wyznaczniku. Teraz należy przyjąć, że $b > v$ oraz wywnioskować sprzeczność, dodając $b - v$ zerowych kolumn do macierzy M i naśladować dowód nie wprost dla nierówności Fishera (str. 203).

14. (i) Jeżeli i -ty wiersz ($i > 1$) zawiera s jedynek, to iloczyn i -tego wiersza z pierwszym pokazuje, że $s - (m - s) = 0$. Również w tym przypadku macierze H i H^T są komutatywne (H^T jest wielokrotnością macierzy H^{-1}); podobne podejście można więc stosować dla kolumn.

(ii) Jeżeli i -ta oraz j -ta kolumna ($1 < i < j$) mają jedynki łącznie na t miejscach, to należy wykorzystać iloczyn dwóch kolumn, aby pokazać, że $t = m/4$.

15. (i) Porównać wszystkie możliwe pary typów wierszy w macierzy N i sprawdzić, na ilu miejscach są one różne. Tych miejsc jest co najmniej $2(k - \lambda)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$v - k \geq 2(k - \lambda), \quad k + 1 \geq 2(k - \lambda), \quad \text{ i } \quad 1 + v - 2(k - \lambda) \geq 2(k - \lambda)$$

co redukuje się do dwóch zadanych nierówności.

(ii) Podstawiając $v = (k(k-1)/\lambda) + 1$ do $v \geq 3k - 2\lambda$ i upraszczając, otrzymujemy równanie kwadratowe, z którego wynika, że $k \geq 2\lambda + 1$.

Rozdział 16

2. Zauważmy, że

$$Q = \frac{(q+1) + (q+1) - 2}{(q+1) - 1}$$

a więc będzie istniał jednokolorowy podgraf K_{q+1} , powiedzmy czerwony. Ale wówczas można wykorzystać fakt, że

$$Q > \binom{(q+2) + q - 2}{(q+2) - 1}$$

3. Niech $n = R(r-1, g) + R(r, g-1)$; założmy, że krawędzie grafu K_n zostały pokolorowane na czerwono oraz zielono i rozważmy $n-1$ krawędzi dochodzących do określonego wierzchołka grafu K_n . Musi być co najmniej $R(r-1, g)$ krawędzi czerwonych lub co najmniej $R(r, g-1)$ krawędzi zielonych i możemy znaleźć, w tradycyjny sposób, czerwony K_r lub zielony K_g .

W przypadku gdy obie liczby $R(r-1, g)$ oraz $R(r, g-1)$ są parzyste, szybki test dwoistości pokazując, że jest niemożliwe, by w grafie K_{n-1} (który ma nieparzystą liczbę wierzchołków) było dokładnie $R(r-1, g) - 1$ czerwonych krawędzi dochodzących do każdego wierzchołka.

4. Można łatwo zastosować arytmetykę modulo, aby pokazać, że nie ma czerwonego podgrafu K_3 .

Założmy, że znaleźliśmy zielony podgraf K_p i (mając na uwadze symetrię) że 1 jest jednym z jego wierzchołków. Wówczas pozostałe $p-1$ wierzchołki muszą być wybrane spośród

$$3, 4, \quad 6, 7, \quad 9, 10, \dots, \quad 3g-9, 3g-8, \quad 3g-6, 3g-5$$

biorąc najwyżej jeden z każdej z tych par.

6. Rozważmy graf pełny na zbiorze 2^r oznaczonych wierzchołków. Mamy $2^{\binom{2^r}{2}}$ sposobów wybrania zbioru krawędzi o kolorze czerwonym. Spośród nich $2^{\binom{2^r}{2} - \binom{2^r}{2}}$ jest takich, że rozważany zbiór krawędzi zawiera $\binom{2^r}{2}$ krawędzi, tworzących podgraf pełny na określonych $2r$ wierzchołkach. Zatem istnieje co najwyżej $\binom{2^r}{2} 2^{\binom{2^r}{2} - \binom{2^r}{2}}$ sposobów wybrania krawędzi czerwonych, wśród których $\binom{2^r}{2}$ będą tworzyły pewien czerwony podgraf K_{2r} . Konsekwentnie, istnieje co najwyżej dwukrotnie więcej sposobów wybrania krawędzi czerwonych otrzymując kolorowanie zawierające czerwony K_{2r} lub zielony K_{2r} . Pokazać teraz, że dla $r \geq 2$

$$2^{\binom{2^r}{2}} > 2^{\binom{2^r}{2} - \binom{2^r}{2}}$$

i przedstawić swoje własne wnioski.

7. (ii) Aby pokazać, że $R(r, g, b) \leq R(r, R(g, b))$, wyobraźmy sobie najpierw, że kolorujemy „na chybił trafił” kolorami zielonym i niebieskim.
(iii) Jeżeli $n = R(r-1, g, b) + R(r, g-1, b) + R(r, g, b-1) - 1$, to w grafie K_n krawędzie dochodzące do któregośkolwiek wierzchołka muszą zawierać albo co najmniej $R(r-1, g, b)$ czerwonych krawędzi, albo co najmniej $R(r, g-1, b)$ zielonych krawędzi, albo co najmniej $R(r, g, b-1)$ niebieskich krawędzi.
(iv) Zastosować indukcję względem $r+g+b$. Przypadki $r=2$, $g=2$ oraz $b=2$ wynikają bezpośrednio, a punkt (iii) daje możliwość kontynuowania indukcji.

8. (i) Pokazać najpierw, że

$$[m!e] + 1 = 2 + m + m(m-1) + m(m-1)(m-2) + \dots + m!$$

Wówczas łatwo można sprawdzić, że to wyrażenie spełnia zadaną zależność rekurencyjną.

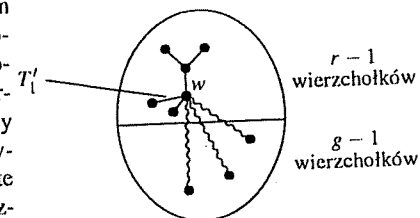
(ii) Jeżeli krawędzie grafu K_{M_m} są pokolorowane za pomocą m kolorów, to wśród $mM_{m-1} - m + 1$ krawędzi, dochodzących do jakiegoś wierzchołka, musi być M_{m-1} krawędzi jednego koloru. Należy spojrzeć na wierzchołki końcowe tych krawędzi i kontynuować w tradycyjny sposób.

9. Założyć, że $m > 1$ i że wynik jest prawdziwy dla $m-1$. Jeżeli

$$R_m = \binom{2R_{m-1} - 2}{R_{m-1} - 1}$$

oraz krawędzie grafu K_{R_m} zostały pokolorowane za pomocą 2^m kolorów, to potraktować te kolory jako 2^{m-1} odcieni czerwonych i 2^{m-1} odcieni zielonych.

12. Jeżeli $r > 2$, $g > 2$ oraz wynik jest prawdziwy dla mniejszych wartości $r+g$, to niech T'_1 będzie drzewem otrzymanym z T_1 przez usunięcie wierzchołka v stopnia 1 (i krawędzi vw). Wówczas w dowolnym pokolorowaniu K_{r+g-2} na czerwono i zielono, będzie istniał czerwony T'_1 lub zielony T_2 . W pierwszym przypadku należy spojrzeć na wszystkie te krawędzie w K_{r+g-2} , które łączą wierzchołek w z $g-1$ wierzchołkami jeszcze nie wykorzystanymi w T'_1 (jak zostało pokazane).



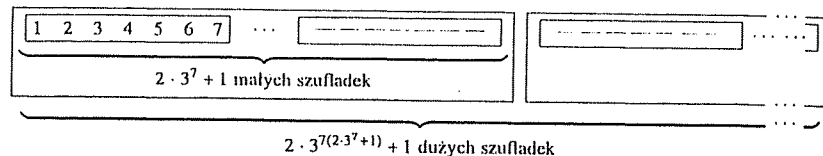
13. Pokolorować dwuelementowe podzbiory zbioru $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, stosując zasadę, że $\{i, j\}$ jest koloru czerwonego, jeżeli suma $i+j$ ma własność $\mathfrak{S}$ (a zielonego w przeciwnym wypadku). Wówczas istnieje nieskończony zbiór $S \subseteq N$, którego każdy dwuelementowy podzbiór ma ten sam kolor: mamy nadzieję, że jest nim kolor czerwony. Jeżeli nie, to spróbować zmodyfikować w jakiś sposób zbiór S .
15. Niech R będzie równe $R(r, r, r)$, a więc jeżeli krawędzie grafu K_R są pokolorowane czterema kolorami, to będzie istniał jednokolorowy K_r . (Istnienie takiego R wynika, na przykład, z zadania 9). Wówczas mając daną dowolną zero-jedynkową macierz (m_{ij}) wymiaru $R \times R$, określić kolorowanie wszystkich krawędzi grafu K_R (na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, R\}$) jednym z czterech kolorów w następujący sposób: dla $i < j$ krawędź ij jest

czerwona, jeżeli $m_{ij} = 0$ oraz $m_{ji} = 0$;

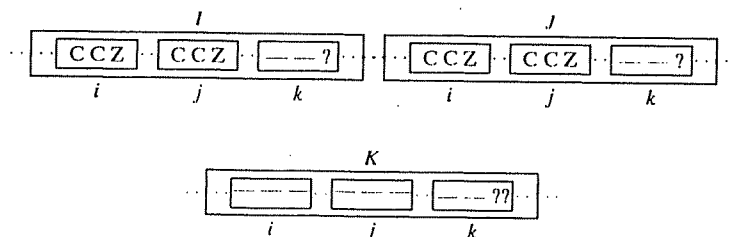
zielona, jeżeli $m_{ij} = 0$ oraz $m_{ji} = 1$; itd.

17. (Jest to podobne rozumowanie do zastosowanego w przykładzie na stronach 238-239, lecz z jednym dodatkowym krokiem). Zapisać liczby od 1 do L w jednej długiej

linii, utworzyć małe szufladki, z których każda zawiera siedem liczb i większe szufladki, z których każda zawiera $2 \cdot 3^7 + 1$ małych szufladek:



Duże szufladki można pokolorować na $3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)}$ sposobów, a więc duże szufladki: I -ta oraz J -ta będą miały ten sam układ kolorów, dla pewnych I oraz J takich, że $I < J \leq 3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)} + 1$. Jeżeli $K = 2J - 1$, to w dalszym ciągu będzie K -ta duża szufladka. Stosując standardowy argument w odniesieniu do I -tej dużej szufladki otrzymamy na przykład



Rozważyć teraz przypadki, gdy „?” jest koloru czerwonego, zielonego lub niebieskiego (w tym ostatnim przypadku trzeba również wziąć pod uwagę „??”).

18. Indukcja względem m . Założyć, że wynik jest prawdziwy dla $m - 1$ kolorów i niech L będzie takie, że jeżeli zbiór $\{1, 2, \dots, L\}$ jest pokolorowany za pomocą $m - 1$ kolorów, to będzie istniał taki r -wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym każdy wyraz oraz różnica tego ciągu będą jednego koloru. Wówczas (mając na uwadze twierdzenie van der Waerdena) niech L^* będzie takie, że jeżeli zbiór $\{1, 2, \dots, L^*\}$ jest pokolorowany m kolorami, to istnieje $((r - 1)L + 1)$ -wyrazowy, jednokolorowy ciąg arytmetyczny. Rozważyć takie kolorowanie i $((r - 1)L + 1)$ -wyrazowy ciąg arytmetyczny koloru czerwonego:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (r - 1)Ld$$

Należy wziąć pod uwagę dwa przypadki w zależności od tego, czy jd jest czerwony dla pewnego j , gdzie $1 \leq j \leq L$ (w tym przypadku znaleźć żądany czerwony ciąg arytmetyczny o różnicy jd), lub też wszystkie liczby

$$d, 2d, 3d, \dots, Ld$$

są pokolorowane jednym spośród $m - 1$ kolorów, różnych od czerwonego (w tym przypadku można zastosować założenie indukcyjne).

Odpowiedzi do zadań

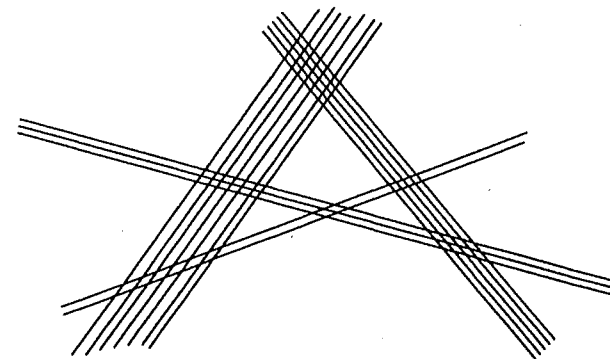
Rozdział 1

2. i 3. $\binom{n-1}{k-1}$

5. $\binom{n-k+1}{k}$

9. (i) $\binom{n}{2}$

(iii) Jedynymi zbiorami złożonymi z dodatnich liczb całkowitych, które dają w sumie 17 i których kwadraty sumują się do 87, są $\{1, 5, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 3, 8\}$, $\{1, 1, 1, 2, 4, 8\}$ oraz $\{2, 3, 5, 7\}$. Stąd jedno z rozwiązań składa się z dwóch prostych równoległych w jednym kierunku, trzech w drugim, pięciu w następnym i siedmiu w jeszcze innym, tak jak pokazano (17 prostych, 101 punktów przecięcia).



10. (i) $\binom{n+1}{2}^2$

(iv) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ (co jest równe $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

11. (i) $\binom{n+2}{3}$

(ii) $\binom{n+2}{3}$

$$(iv) \binom{n}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-4}{2} + \dots + \begin{cases} \binom{2}{2} & (n \text{ parzyste}) \\ \binom{3}{2} & (n \text{ nieparzyste}) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1) \text{ dla } n \text{ parzystego i } \frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) \text{ dla } n \text{ nieparzystego}$$

$$13. 1 - \frac{\binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}} = 1 - \frac{n}{m+1} \quad (m \geq n), \quad 0 \text{ w przeciwnym razie}$$

[W przypadku gdy $m = n$, liczba możliwych do przyjęcia kolejek wynosi $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Jest to liczba *Catalana*, która będzie rozważana ponownie w zadaniu 10 na stronie 141].

Rozdział 2

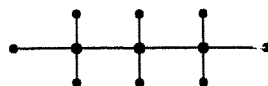
$$1. (i) \binom{n}{2} \text{ lub } \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$(ii) \binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{m}$$

$$(iii) 2^{n(n-1)/2}$$

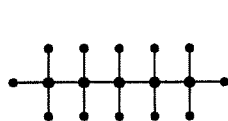
5. (i) n (pod warunkiem, że $n > 2$), a dokładnie 1 w przypadku, gdy $n = 2$.
 (ii) $n(n-1)(n-2)$ (pod warunkiem, że $n > 4$) i 12, 3, 0, odpowiednio w przypadkach $n = 4, 3, 2$.
 (iii) $n!/2$
 (iv) $(n-1)^{n-2}$

6. (ii) Jest jeden izomer postaci C_3H_8 , mianowicie

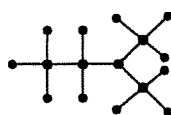


propan

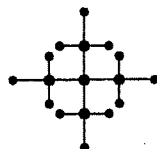
Są trzy możliwe izomery postaci C_5H_{12} i w rzeczywistości wszystkie one istnieją:



pentan



2-metylobutan



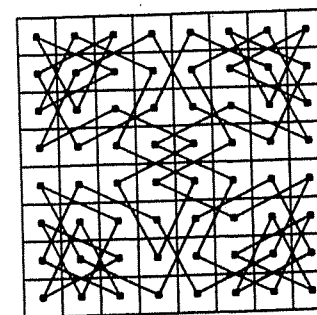
2,2-etanopropan

Rozdział 3

1. (i) Istnieją trzy sposoby znalezienia mężów dla dziewcząt: mogą one poślubić (odpowiednio) chłopców 1, 4, 2, 3, 6, 5 lub chłopców 2, 4, 1, 3, 6, 5 lub chłopców 2, 4, 3, 1, 6, 5.
 (ii) Jest niemożliwe znaleźć mężów dla wszystkich dziewcząt. Na przykład dziewczęta 1, 2, 3 i 5 znają tylko chłopców 1, 3 i 5.

Rozdział 4

11. (ii) Jedna z wielu możliwych tras dla skoczka jest następująca:



12. (i) $7334 (= 5000 + 3333 + 2000 - 1666 - 1000 - 666 + 333)$
 (ii) $7715 (= 5000 + 3333 + 2000 + 1428 - 1666 - 1000 - 666 - 714 - 476 - 285 + 333 + 238 + 142 + 95 - 47)$

13. Zasada włączania/wyłączania daje

$$\binom{52}{5} - \binom{4}{1} \binom{48}{5} + \binom{4}{2} \binom{44}{5} - \binom{4}{3} \binom{40}{5} + \binom{4}{4} \binom{36}{5} = 10752$$

$$14. \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\left(= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \text{ co dąży do rozwinięcia w szereg liczby } e^{-1} \right).$$

15. (i) n^m
 (ii) $n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)$

Rozdział 5

1. i musi być 6, nie ma więc możliwości dla j . Jedno z rozszerzeń, gdy $i = 6$, ma postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $N = \max\{n, p + q\}$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. (i) Odpowiedź (z jedynką dodaną do każdego elementu) jest pokazana w przykładzie na stronie 72

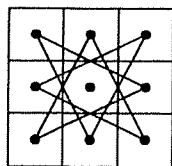
(iii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

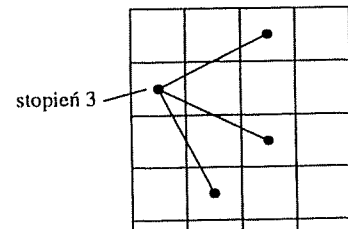
(Zauważmy, że jak zawsze przy takiej konstrukcji pierwszy kwadrat łaciński w (i) oraz w (iii) stanowi tabelę dodawania.)

Rozdział 6

1. (i) Graf K_n jest eulerowski dla n nieparzystych, a semi-eulerowski dla $n = 2$.
 (ii) Graf $K_{m,n}$ jest eulerowski dla m i n parzystych, a semi-eulerowski dla $m = n = 1$ oraz dla m nieparzystych, gdy $n = 2$ (lub odwrotnie).
 (iii) Graf K_n jest hamiltonowski dla $n \geq 3$.
 (iv) Graf $K_{m,n}$ jest hamiltonowski dla $m = n > 1$.
2. Drogi istnieją tylko wtedy, kiedy $n = 1, 2$ lub 3 (choć dla pierwszych dwóch przypadków żadne ruchy nie są możliwe!).



Dla $n \geq 4$ graf otrzymany na podstawie ruchów skoczka nie jest eulerowski, ponieważ ma osiem wierzchołków nieparzystego stopnia; np.



4. Najmniejszym przykładem jest cykl na pięciu wierzchołkach.

Rozdział 8

1. (i) Wynikami muszą być $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1, 0$ i jest $n!$ sposobów określenia, który z graczy ma jaki wynik. (Są one wówczas wyznaczone tak, jakby każda z gier była wygrana przez gracza mającego wyższy wynik).
 (ii) Żaden.
 (iii) n musi być parzyste: największym wynikiem jest wówczas $n - 1$, a wszystkie pozostałe wynoszą $\frac{1}{2}n - 1$.

$$2. \binom{n}{3} - \binom{b_1}{2} - \binom{b_2}{2} - \dots - \binom{b_n}{2}$$

6. (i) Gdy n jest nieparzyste, potrzebujemy n dni, a w przypadku n parzystego wystarczy $n - 1$ dni.
 (ii) Gdy n jest nieparzyste, potrzebujemy $2n$ dni, a w przypadku n parzystego wystarczy $2(n - 1)$ dni.

Rozdział 10

1. (i) $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ z $g_1 = 2 (= F_3)$ i $g_2 = 3 (= F_4)$: więc $g_n = F_{n+2}$
 (ii) $j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$ z $j_1 = 1 (= F_2)$ i $j_2 = 2 (= F_3)$: więc $j_n = F_{n+1}$

$$2. (ii) c_n = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1})$$

$$= \binom{n+1}{0} + 2\binom{n+1}{2} + 2^2\binom{n+1}{4} + 2^3\binom{n+1}{6} + \dots$$

$$(iii) c_n = \text{współczynnik przy } x^n \text{ w } (1+x)(1+x(2+x)+x^2(2+x)^2+\dots)$$

$$= \left(\binom{n}{0}2^n + \binom{n-1}{1}2^{n-2} + \binom{n-2}{2}2^{n-4} + \dots \right)$$

$$+ \left(\binom{n-1}{0}2^{n-1} + \binom{n-2}{1}2^{n-3} + \binom{n-3}{2}2^{n-5} + \dots \right)$$

3. r_n jest współczynnikiem przy x^n w wyrażeniu

$$r(x) = \frac{x}{(1-x-2x^2)(1-x)} = \frac{x}{(1-2x)(1+x)(1-x)} = \frac{2}{3(1-2x)} - \frac{1}{6(1+x)} - \frac{1}{2(1-x)}$$

i jest równy

$$\left(\frac{2}{3} \times 2^n\right) - \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ \frac{1}{3}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases} = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right]$$

gdzie [...] oznacza „część całkowitą”.

6. (i) $\binom{n+k-1}{2k-1}$

8. Inwersja równań zmiennej s_n daje

$$\begin{aligned} \binom{1}{1} 1^m &= s_1 \\ -\binom{2}{1} 1^m + \binom{2}{2} 2^m &= s_2 \\ \binom{3}{1} 1^m - \binom{3}{2} 2^m + \binom{3}{3} 3^m &= s_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

i w ogólności

$$s_n = n^m - \binom{n}{n-1} (n-1)^m + \binom{n}{n-2} (n-2)^m - \dots + (-1)^{m-1} \binom{n}{1} 1^m$$

tak jak poprzednio.

11. (iii) Suriekcja z $\{1, 2, \dots, m\}$ do $\{1, 2, \dots, n\}$ jest tym samym co podział $\{1, 2, \dots, m\}$ na n zbiorów, w którym uporządkowanie zbiorów ma znaczenie. Tak więc (na mocy odpowiedzi do zadania 8)

$$S(m, n) = \frac{1}{n!} \left(n^m - \binom{n}{n-1} (n-1)^m + \binom{n}{n-2} (n-2)^m - \dots + (-1)^{m-1} \binom{n}{1} 1^m \right)$$

(iv) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

12. $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 =$

$$= (x(1+x)(1+x+x^2))(x(1+x)(1+x+x^2))^2$$

$$= (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8)$$

W ten sposób dwie nowe kostki mają ścianki 1, 2, 2, 3, 3, 4 oraz 1, 3, 4, 5, 6, 8. Jest dyskusyjne, które z par kostek są lepsze dla gry *Monopol*. Ja posłużyłbym się nowymi kostkami, ponieważ pary tych samych liczb pojawiają się z mniejszą częstotliwością, zatem rzadziej chodziłbym do więzienia!

Rozdział 11

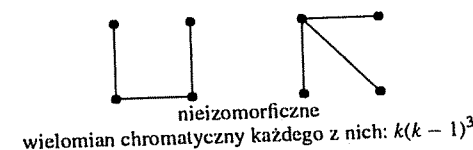
5. Niech $v_1, v_2, \dots, v_n$ ($= w$) będą wierzchołkami uporządkowanymi według malejących odległości od w . Niech $1, 2, \dots, d$ będą kolorami. Kolorujmy wierzchołki według uporządkowania, używając w każdym kroku, dla kolejnego wierzchołka v_i , koloru o najmniejszym numerze, którym nie jest pokolorowany wierzchołek połączony z v_i . Łatwo się przekonać, że dla takiego kolorowania użyjemy d kolorów.

8. $p_G(k) = p_{K_6}(k) + 4p_{K_5}(k) + 4p_{K_4}(k) + p_{K_3}(k)$
 $= k(k-1)(k-2)(k^3 - 8k^2 + 23k - 23)$

9. $p_G(k) = \frac{(k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4))^2}{k(k-1)} + \frac{(k(k-1)(k-2)(k-3))^2}{k}$
 $= k(k-1)(k-2)^2(k-3)^2(k^2 - 7k + 15)$

11. (ii) Bez żadnych ograniczeń liczba sposobów wynosi $k(k-1)^n(k-2)^{2n}$; w przypadku gdy wszystkie v_i są tego samego koloru, liczba sposobów wynosi $k(k-1)^n(k-2)^n$.

13. (iii) Nietrudno sprawdzić, że każde dwa nieizomorficzne grafy na trzech lub mniej wierzchołkach mają różne wielomiany chromatyczne. Potrzebujemy więc czterech wierzchołków, a na mocy (ii) dwa nieizomorficzne drzewa na czterech wierzchołkach będą miały taki sam wielomian chromatyczny; tj.



Rozdział 12

1. Nie! W każdym wielomianie szachowym wyraz wolny jest równy 1, a w wielomianie chromatycznym wyraz ten jest zerem.

2. (i) $1 + 12x + 48x^2 + 74x^3 + 40x^4 + 4x^5$
 (ii) Liczba możliwości, w których żadne i nie przechodzi na wymienione elementy, równa się 4

Liczba możliwości, w których każde i przechodzi na wymienione elementy
 $= 5! - 4! \times 12 + 3! \times 48 - 2! \times 74 + 1! \times 40 - 0! \times 4 = 8$

3. Zacieniowana część tablicy (we wskazówkach do zadań) ma wielomian szachowy

$$(1 + 3x + x^2)(1 + 5x + 6x^2 + x^3) = 1 + 8x + 22x^2 + 24x^3 + 9x^4 + x^5$$

W ten sposób żądana odpowiedź $= 5! - 4! \times 8 + 3! \times 22 - 2! \times 24 + 1! \times 9 - 0! \times 1 =$
 $= 20$

4. Zacięniowana część tablicy ma wielomian szachowy

$$(1 + 4x + 2x^2)(1 + 6x + 9x^2 + 2x^3) = 1 + 10x + 35x^2 + 50x^3 + 26x^4 + 4x^5$$

W ten sposób żądana odpowiedź $= 5! - 4! \times 10 + 3! \times 35 - 2! \times 50 + 1! \times 26 - 0! \times 4 = 12$

5. (i)
- $\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2$
- , jeżeli
- n
- jest parzyste, oraz
- $\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+2}{2}\right)!$
- , jeżeli
- n
- jest nieparzyste.

$$(ii) \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2, \text{ jeżeli } n \text{ jest parzyste, oraz } 0, \text{ jeżeli } n \text{ jest nieparzyste.}$$

9. (i)
- $1 + 1! \binom{n}{1} x + 2! \binom{n}{2} x^2 + 3! \binom{n}{3} x^3 + \dots + n! \binom{n}{n} x^n$
- (lub równowartość).

(ii) Zacięniowana część tablicy ma wielomian szachowy

$$(1 + 4x + 2x^2)^4 = 1 + 16x + 104x^2 + 352x^3 + 664x^4 + 704x^5 + 416x^6 + 128x^7 + 16x^8$$

a więc żądana odpowiedź wynosi 4752, mianowicie

$$8! - 7! \times 16 + 6! \times 104 - 5! \times 352 + 4! \times 664 - 3! \times 704 + 2! \times 416 - 1! \times 128 + 0! \times 16$$

$$(iii) 4752/8! = 33/280$$

(iv) Tym razem zacięniowana część tablicy (przedstawiona we wskazówkach) ma wielomian szachowy

$$(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4)^{13}$$

chcąc więc wyliczyć wartość $52! - 51! \times r_1 + 50! \times r_2 - \dots$, musimy posłużyć się komputerem. Prawdopodobieństwo, że nie będzie „wojny” (= ta wartość podzielona przez $52!$), wynosi

$$\frac{4610507544750288132457667562311567997623087869}{284025438982318025793544200005777916187500000000} (\approx 0,0162)$$

10. (i)
- $1 + \binom{m}{1}x + \binom{m-1}{2}x^2 + \dots + \binom{m+1-k}{k}x^k + \dots$

(ii) Wielomian szachowy tej tablicy ma postać

$$\sum_{k=0}^n \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} x^k$$

(iii) Liczba sposobów rozsadzenia tych $2n$ osób wynosi

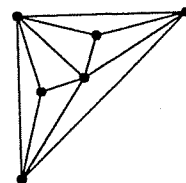
$$2n! + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

(Zauważmy, że nasza odpowiedź nie bierze pod uwagę symetrii okrągłego stołu: całkiem naturalnie zakłada się, że każde miejsce jest inne, na przykład najbliższe drzwi więcej!)

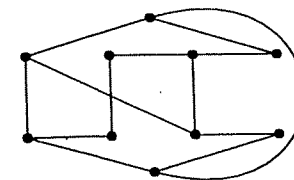
Rozdział 13

2. Graf (i) jest planarny, a graf (ii) nie jest:

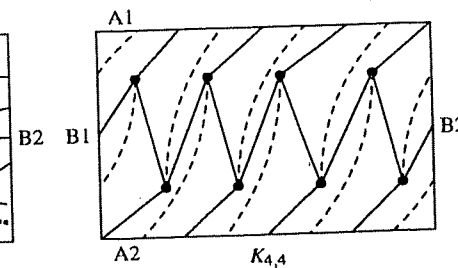
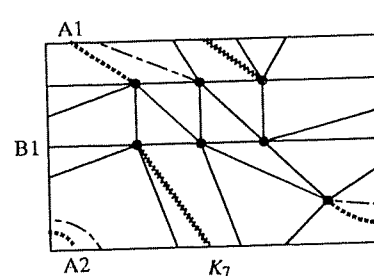
(i)



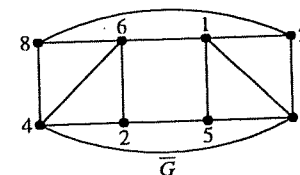
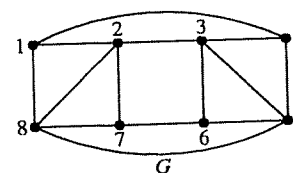
(ii)



4. Jest raczej dość trudno przedstawić przekonujący trójwymiarowy rysunek, a więc wykorzystamy standardowe podejście topologiczne. Wyobraźmy sobie każdą z następujących figur na elastycznym, naprężonym kawałku papieru. Bok 'A1' łączymy z bokiem 'A2', tworząc walec z rysunkiem na zewnątrz. Następnie bok 'B1', (który stał się teraz okręgiem) łączymy z bokiem 'B2' bez niepotrzebnych „skręceń”. W rezultacie otrzymamy
- K_7
- (po stronie lewej) i
- $K_{4,4}$
- (po stronie prawej), narysowane na powierzchni torusa, bez żadnych przecinających się krawędzi (jak obwarzanek z otworem w środku). Powierzchnia ta jest geometrycznie/topologicznie równoważna płaszczyźnie z dodatkowym mostem.

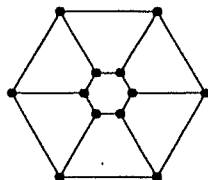
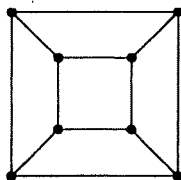


6. (i)

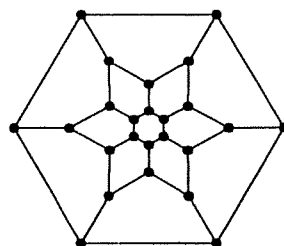
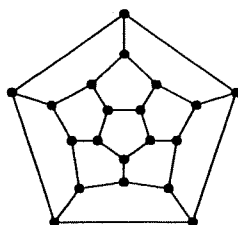


7. Liczba regionów wewnątrz wieloboku wynosi
- $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n + 1$
- .

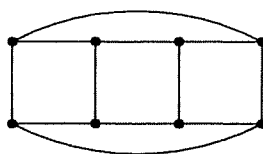
8. (i)



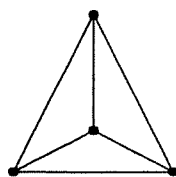
(ii)



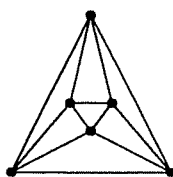
9. Tak, na przykład



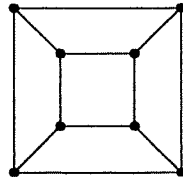
12. (c, d) może być $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$ lub $(5, 3)$. W każdym przypadku graf istnieje (i w rzeczywistości są one „mapami” pięciu słynnych brył platońskich):



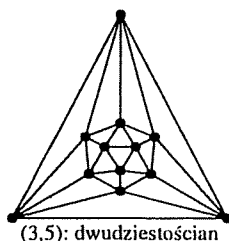
(3,3): czworoscian



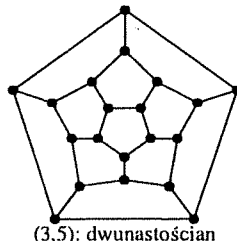
(3,4): osmiościan



(4,3): sześciąt



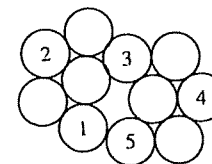
(3,5): dwudziestościan



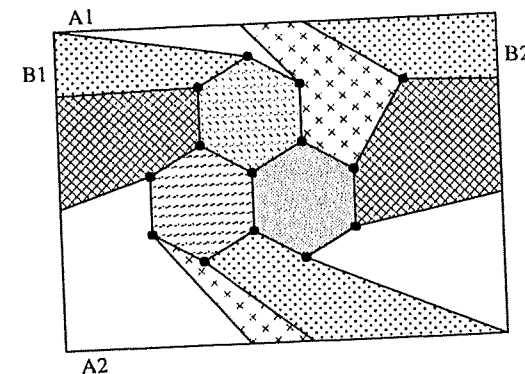
(3,5): dwunastościan

Rozdział 14

2. Gdyby dozwolone było użycie tylko trzech kolorów w następującym rozmieszczeniu, wówczas rozpoczynając kolorowanie w 1 i wykonując je „w górę”, doprowadzilibyśmy do tego, że wszystkie ponumerowane monety miałyby ten sam kolor; mamy więc dwie stykające się monety o jednym kolorze:



5. Tak jak w odpowiedziach do zadania 4 w poprzednim rozdziale, można skonstruować torus z następującego rysunku przez połączenie krawędzi A1 z A2 (bez niepotrzebnych „skręceń”), a następnie połączenie B1 z B2. W otrzymanej na powierzchni „mapie” jest siedem regionów i każde dwa mają wspólną granicę:



Rozdział 15

7. Jeden z możliwych zbiorów spośród siedmiu ustawień ma postać

1 2 3	1 4 5	1 6 7	1 8 9	1 10 11	1 12 13	1 14 15
4 8 12	2 9 11	2 12 14	2 13 15	2 4 6	2 5 7	2 8 10
5 10 15	3 12 15	3 9 10	3 4 7	3 13 14	3 8 11	3 5 6
6 11 13	6 8 14	4 11 15	5 11 14	5 9 12	4 10 14	4 9 13
7 9 14	7 10 13	5 8 13	6 10 12	7 8 15	6 9 15	7 11 12

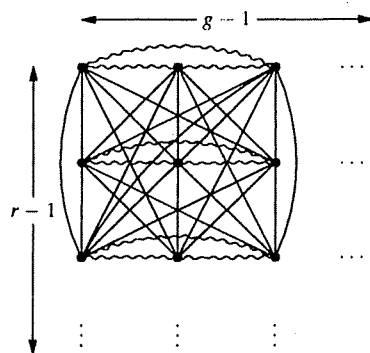
(W rzeczywistości jest to specjalny rodzaj systemu trójek Steinerja — jak w zadaniu 8 — przy $b = 35$ oraz $v = 15$.)

$$10. (iii) L = \begin{pmatrix} \boxed{K} & & & & \\ & \boxed{K} & & & \\ & & \boxed{K} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \boxed{K} \end{pmatrix}$$

11. $p = 0,75 \Rightarrow$ (i) $p^2(3 - 2p)$ (ii) $p^4(15 - 24p + 10p^2)$
 $p = 0,3 \Rightarrow$ (i) 0,844 (ii) 0,831
 $p = 0,1 \Rightarrow$ (i) 0,216 (ii) 0,070
 $p = 0,1 \Rightarrow$ (i) 0,028 (ii) 0,001

Rozdział 16

11. Tak jak na stronie 227 rozmieścić $(r - 1)(g - 1)$ wierzchołków w postaci kraty wymiaru $(r - 1) \times (g - 1)$ i pokolorować na zielono te krawędzie, które łączą dwa wierzchołki z tego samego wiersza. Jak widzieliśmy poprzednio, nie istnieje żaden spójny graf zielony na g wierzchołkach. Również mając zadany dowolny graf czerwony, pokolorować jego wierzchołki leżące w i -tym wierszu kolorem i ($1 \leq i \leq r - 1$). Otrzymamy kolorowanie wierzchołków każdego czerwonego grafu za pomocą $r - 1$ kolorów. W ten sposób G_1 nie może być czerwony.



12. Niech $g - 2 = k(r - 1)$. Wówczas $r + g - 3 = (r - 1)(k + 1)$ i czerwone krawędzie w K_{r+g-3} mogą utworzyć $k + 1$ składowych, z których każda jest grafem K_{r-1} ; pozostałe krawędzie są zielone. Jasne jest, że wtedy nie istnieje żadne czerwone drzewo T_1 . Ponadto do każdego wierzchołka dochodzi dokładnie $g - 2$ zielonych krawędzi. Ponieważ drzewo T_2 musi mieć wierzchołek stopnia $g - 1$, nie może zatem istnieć zielone drzewo T_2 .

Literatura

- M. Aigner: *Combinatorial theory* (Springer-Verlag, 1979)
I. Anderson: *A first course in combinatorial mathematics* (Oxford, 1979)
M. Behzad and G. Chartrand: *Introduction to the theory of graphs* (Allyn and Bacon, 1971)
L.W. Beineke and R.J. Wilson (ed): *Selected topics in graph theory* (Academic Press, 1978)
N.L. Biggs, E.K. Lloyd and R.J. Wilson: *Graph theory 1736–1936* (Oxford, 1976)
J.A. Bondy and U.S.R. Murty: *Graph theory with applications* (Elsevier, 1976)
J.A. Bondy and U.S.R. Murty (ed): *Graph theory and related topics* (Academic Press, 1979)
V.W. Bryant: *Yet another introduction to analysis* (Cambridge, 1990)
V.W. Bryant and H. Perfect: *Independence theory in combinatorics* (Chapman and Hall, 1980)
P.J. Cameron and J.H. Van Lint: *Graph theory, coding theory and block designs* (Cambridge, 1975)
S. Fiorini and R.J. Wilson: *Edge-colourings of graphs* (Pitman, 1977)
R.L. Graham, B.L. Rothschild and J.H. Spencer: *Ramsey theory* (Wiley, 1980)
F. Harary: *Graph theory* (Addison-Wesley, 1969)
R. Hill: *A first course in coding theory* (Oxford, 1986)
L. Lovasz and M.D. Plummer: *Matching theory* (North Holland, 1991)
L. Mirsky: *Transversal theory* (Academic Press, 1971)
J.W. Moon: *Topics on tournaments* (Holt, Rinehart and Winston, 1968)
R.F. Reichmeider: *The equivalence of some combinatorial matching theorems* (Polygonal, 1984)
H.J. Ryser: *Combinatorial mathematics* (Maths Association of America/Wiley, 1963)
R.P. Stanley: *Enumerative combinatorics (vol. 1)* (Wadsworth and Brooks, 1986)
A.P. Street and D.J. Street: *Combinatorics of experimental design* (Oxford, 1987)
R.J. Wilson: *Introduction to graph theory (3rd ed)* (Longman, 1985)

Skorowidz

A

acykliczna orientacja 111, 154
algorytm węgierski 116
alkan 34
alken 34
Appel K. 194
arytmetyka modulo 75, 205, 207
asortyment 199

B

blok 199
Brooksa twierdzenie 146
bryły platońskie 282

C

Catalana liczba 142, 274
Cayleya twierdzenie 27, 128
ciało 76, 207
Galois 77, 208
cykl 23
część całkowita 57
czworoscian 282

D

digraf 108
długość kodu 213
domino 51, 138
dopełnienie
grafu 93, 152, 181, 198
tablicy 157-158
doskonały zbiór różnicowy 205-208
droga w kracie 13-15
górną 141
drzewo 24-34, 218
dualność punktów i linii 78
dwudziestoscian 282
dwunastoscian 172, 282

E

Euler L. 84
Eulera
funkcja 57
kwadrat 72
szlak 85, 108
twierdzenie 84-88
wzór 172-7

F

Fary'ego twierdzenie 171
Fermata wielkie twierdzenie 236
Fibonacciego liczby 125, 129, 138
Fishera nierówność 203
Fleury'ego algorytm 89
Ford L.R. 121
Fulkerson, D.R. 121
funkcja tworząca 130-142

G

górną drogą 141
graf 22
dualny 195
dwudzielny 40
dwudzielny pełny 32
eulerowski 85
hamiltonowski 91
klasy I (i 2) 104
niespójny 23
pełny 32
planarny 169-183
prosty 22
rodzaju g 179
semi-eulerowski 87
semi-hamiltonowski 94
silnie spójny 109, 111
skierowany 108

Skorowidz

graf spójny 23
grafy
homeomorficzne 177
izomorficzne 32
granica 174
grubość grafu 181

H

Hadamarda macierz 221
Haken W. 194
Halla twierdzenie 35-46, 124
postać grafowa 41
postać macierzowa 41, 113
postać transwersalowa 40
wersja haremowa 106
wersja małżeńska 37
Hamiltona cykl 60, 91, 108, 111
Heawooda twierdzenie 195

I

indeks chromatyczny 95
grafu dwudzielnego 98
grafu K_n 96
iniekcja 61
inwersja 140
izomer 33

K

K-graf 177
Kirkmana problem o uczennicach 218
Kleina grupa 62
kod 213-217
binarny 213
korygujący błędy 213-217
kolorowanie
krawędzi 95-105, 191
map 184-198
regionów 184-198
wierzchołków 143-154
konfiguracja 199-212
cykliczna 205-209
dualna 209-211
symetryczna 204-212
zrównoważona niepełna 199
koniec krawędzi 22
kostka sześcienna 135-142
Königa twierdzenie 98
Kőnig-Egerváry'ego twierdzenie 114, 124

krata 13
krawędź 22
rozspójniająca 88
krawędziowo-rozłączny 124
Kuratowskiego twierdzenie 178
kwadrat grecko-laciński 72

L

Landaua twierdzenie 110
lemat o uściskach dłoni 33, 250
liczba chromatyczna 143
linia 78

Ł

łacińskie kwadraty 62-83
i skończone płaszczyzny rzutowe 78-82
ortogonalne 71-82
wzajemnie ortogonalne 72
prostokąty 62, 156
łamiągówka chińskich pierścieni 138
łączyć 22

M

macierz
bistochastyczna 45, 62
incydencji (konfiguracji) 201
permutacyjna 45
semi-stała 247
mapa 185
sześcienna 187
Mengera twierdzenie 117
postać krawędziowa 124
modulo n 76
monety 134, 197
most 88, 179

N

najdłuższa ścieżka 23
najkrótsza ścieżka 145
nienasycona krawędź 119
nieporządek 58, 164

O

obwód 23, 176
ortogonalne kwadraty łacińskie 71-82
ośmiościan 282

P

parafina 34
 parametry konfiguracji 200
 Pascala trójkąt 14, 125
 pentan 274
 permutacja 58, 156
 Petersena graf 176
 planarna reprezentacja 170
 podciąg
 malejący 49-50
 rosnący 49-50
 podgraf 23
 podmacierz zasadnicza 247
 podział
 krawędzi 177
 liczb całkowitych 136-137
 zbiorów 132
 problem
 mostów królewieckich 84
 oficerski 71-72
 pani domu 167
 propan 274
 Prüfera kod 29
 przekrój 121
 przepływ 118-124
 przepustowość
 krawędzi 118
 przekroju 121
 przesmyk 88
 pulki i rangi 71-72
 punkt 78

R

Ramseya
 liczba 223, 227-229
 teoria 223-247
 twierdzenie 223-235
 rączka 179
 region 170-172
 nieskończony 171
 skończony 171
 reprezentant 39
 Ringel G. 180
 rodzaj grafu 179
 $K_{m,n}$ 180
 K_n 180
 rodzina zbiorów 39
 rozdzielający zbiór krawędzi
 w grafie 124

rozdzielający zbiór krawędzi w sieci 120
 wierzchołków 116
 rozwinięcie dwumianowe 12
 równanie charakterystyczne 129
 ruchy skoczka 60, 91
 rząd (płaszczyzny rzutowej) 78

S

Schura twierdzenie 236
 sieć 118-124
 silnia 12
 sito Eratosthena 61
 skierowany szlak 108
 Eulera 109
 skierowany cykl Hamiltona 108, 111
 składowa 23
 skojarzenie 115
 z V_1 do V_2 41
 skończona płaszczyzna rzutowa 78-82, 211
 i kwadraty łacińskie 79-82
 rzędu n 78, 212
 rzędu 6 81, 212, 219
 rzędu 10 82, 212
 Stanleya twierdzenie 154
 Steinera system trójkąt 218
 Stirlinga liczby
 drugiego rodzaju 133, 142, 166
 pierwszego rodzaju 133, 142
 stopień
 wierzchołka 24
 wejścia 108
 wyjścia 108
 suriekcja 61, 141
 system różnych reprezentantów 39
 szachownica 51, 157
 sześcián 172, 282
 szlak 23
 domknięty 85
 Eulera 85
 semi-eulerowski 87

Ś

ścieżka 23
 powiększająca przepływ
 ścieżki rozłączne 115

T

tablica 155

teoria transversal 39, 42
 topologia 170, 179
 torus 181
 transversala 39
 turniej 107-111
 twierdzenia minimaksowe 112-124, 216
 twierdzenie
 o czterech kolorach 186, 194
 o pięciu kolorach 196
 o maksymalnym przepływie-minimalnym
 przekroju 120
 o małżeństwach 35-46

U

ujście przepływu 121

V

van der Waerdena
 liczba 241
 twierdzenie 242
 Vizinga twierdzenie 99, 103, 194

W

waga słowa kodowego 216
 warstwa 46, 236
 wartość przepływu 120
 wektor wyników 109
 wielomian
 chromatyczny 150
 szachowy 155-168
 wierzchołek
 grafu 22
 końcowy 22
 wielokąta 242
 wierzchołkowa liczba chromatyczna 143
 wieża
 Brahma 126
 Hanoi 126
 szachowa 155

współczynnik
 dwumianowy 9-21
 wielomianowy 15-17
 wynik turnieju 108
 wypukła otoczka 242
 wypukły
 wielokąt 242
 zbiór 242
 wzajemnie ortogonalne kwadraty 72

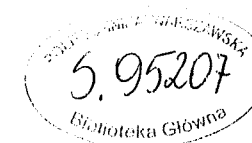
Z

zależność rekurencyjna 125-142
 zasada
 dwoistości 50-55
 szufladkowa 47-50
 włączania/wyłączania 55-59, 162
 zbiór
 krawędzi E 22
 o kształcie gwiazdy 171
 wierzchołków V 22
 wypukły 242

Ż

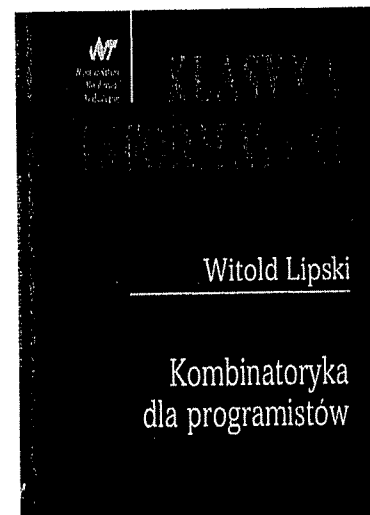
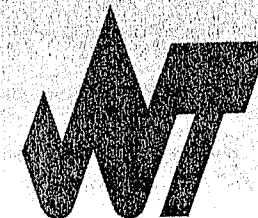
źródło przepływu 121

$\mathfrak{A}$ 39
 $\gamma(G)$ 179
 δ_v 24
 $\binom{n}{k}$ 9
 E 22
 $G = (V, E)$ 22
 $GF(n)$ 77, 208
 $K_{m,n}$ 32
 K_n 32
 V 22
 $n!$ 12
 $[x]$ 57
 $\{x\}$ 180
 $|X|$ 33
 $\lambda(G)$ 142
 $\lambda_e(G)$ 95



WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE
ul. Mazowiecka 2/4, 00-048 Warszawa
tel. 0-22 826 72 71
Dział Marketingu i Sprzedaży
tel. 0-22 827 56 87, fax 0-22 826 82 93
e-mail: handlowy@wnt.pl

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne polecają



Witold Lipski

Kombinatoryka dla programistów

Wydanie trzecie rozszerzone

Trudno byłoby chyba wymienić dział informatyki teoretycznej, w którym poczyniono by większe postępy niż w projektowaniu i analizie algorytmów kombinatorycznych [...].

Efektywne algorytmy kombinatoryczne znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach nienumerycznego przetwarzania informacji, zwłaszcza w optymalizacji dyskretnej i badaniach operacyjnych.

W książce tej przedstawiłem wybrane działy kombinatoryki, szczególnie nacisk kładąc na konstruktywne, algorytmiczne podejście. Omawianym w niej problemom kombinatorycznym towarzyszą z reguły algorytmy ich rozwiązywania wraz z analizą złożoności obliczeniowej. Algorytmy te są nieco skondensowanymi wersjami programów uruchomionych w języku Pascal [...].

WITOLD LIPSKI

Szczegółowy
spis treści
można znaleźć
na stronach
naszej
księgarni internetowej:
www.wnt.pl

WNT. Warszawa 2007. Wyd. II
Ark. wyd. 20,0. Ark. druk. 18,25
Symbol Et/84316/WNT
SOWA Spółka z o.o.

Książka ta jest przeznaczona dla studentów informatyki i programistów. Ze względu na fakt, że język Pascal jest coraz rzadziej używany przez informatyków, wszystkie programy autora zostały w tym nowym wydaniu przepisane na język C++.