Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – банвахово пространство; $M \subset X$ – замкнутое множество, и

$$B = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$$

– единичный шар. Мы предполагаем, что $\inf\{\|x\| : x \in M\} > 1$.

Theorem 1. *Пусть отображение $T : M \to M$ обладает следующим свойством. Если $Tx \ne x$ то существует $t > 1$ такое, что $x + t(Tx - x) \in B$.*

Тогда отображение T имеет неподвижную точку.

Доказательство. Введем отношение частичного порядка в M по правилу:

$$x < y \Longleftrightarrow x = y \quad \text{либо} \quad \exists t > 1 : \quad x + t(y - x) \in B.$$

Таким образом, для всех $x \in M$ имеем $x < Tx$.

Очевидно, что максимальный элемент множества M и будет искомой неподвижной точкой. Покажем, что максимальный элемент существует. Для этого проверим условия леммы Цорна.

Пусть $C \subset M$ – цепь; положим $\rho = \inf\{\|z\| : z \in C\}, \quad \rho > 1$ и

$$K_x = \{y \in M \mid \|y\| \ge \rho, \quad y > x\}, \quad x \in C.$$

Множество K_x не пусто, ибо $x \in K_x$.

Легко показать, что множества K_x замкнуты и

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow K_{x_2} \subset K_{x_1}. \tag{1}$$

Lemma 1. $u < v \Longrightarrow \|v\| \le \|u\|$.

Действительно, поскольку $u, v \in M$, имеем $\|u\|, \|v\| > 1$ и тогда

$$u + t(v - u) = a, \quad \|a\| = 1, \quad t > 1.$$

Откуда

$$v = \frac{(t-1)u + a}{t}, \quad \|v\| \le \|u\| + (1 - \|u\|)/t < \|u\|.$$

Lemma 2. *Пусть $z \in K_x, \quad x \in C$. Тогда*

$$\|z - x\| \le \frac{\|x\| - \rho}{\|x\| - 1}(1 + \|x\|).$$

Действительно,

$$x + t(z - x) = a, \quad \|a\| = 1, \quad t > 1, \quad \|x\|, \|z\| \ge \rho > 1. \tag{2}$$

Откуда $z = (a + (t-1)x)/t$ и

$$\rho \le \|z\| \le \frac{1}{t} + \frac{t-1}{t}\|x\|, \quad \frac{1}{t} \le \frac{\|x\| - \rho}{\|x\| - 1}.$$

Еще раз используем формулу (2):

$$\|z - x\| = \frac{1}{t}(\|a - x\|) \le \frac{1}{t}(1 + \|x\|).$$

Lemma 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{x} \in C$ такой, что*

$$C \ni x > \tilde{x} \Longrightarrow \operatorname{diam} K_x < \varepsilon.$$

Доказательство леммы 3. По определению числа ρ и лемме 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x' \in C$ такой, что

$$C \ni x > x' \Longrightarrow \|x\| < \varepsilon + \rho.$$

Пусть теперь $z_1, z_2 \in K_x$. Применим лемму 2 к каждому слагаемому в правой части неравенства:

$$\|z_1 - z_2\| \leq \|z_1 - x\| + \|z_2 - x\|.$$

Лемма доказана.

Таким образом, замкнутые множества K_x вложены друг в друга (см. формулу (1)) и их диаметры стремятся к нулю. По известной теореме, следующее пересечение не пусто и состоит из единственной точки:

$$\bigcap_{x \in C} K_x = \{m\}.$$

Точка m и есть верхняя грань цепи C: для любого $x \in C$ имеем $m \in K_x$, следовательно, по определению K_x, будет $x < m$.

Теорема доказана.