Четыре-лемма и полудекартовы квадраты

Y. Y.

15.02.2023

Теорема 1 (4-лемма)**.** *Пусть у нас есть коммутативный квадрат в категории модулей над ассоциативным унитальным кольцом:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

Пусть индуцированное отображение между ядрами горизонтальных стрелок сюръективно, а между коядрами — инъективно. Тогда то же верно для вертикальных стрелок.

Доказательство. Переведём условия на язык связанного с коммутативным квадратом короткого комплекса $0 \to A \to B \oplus C \to D \to 0$. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{Z} \subset B \oplus C$ — границы и циклы. Сюръективность отображения между ядрами горизонтальных стрелок эквивалентна тому, что прообразы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{Z}$ относительно вложения $C \to B \oplus C$ совпадают. Инъективность отображения между коядрами горизонтальных стрелок эквивалентна тому, что образы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{Z}$ относительно проекции $B \oplus C \to B$ совпадают. Эти два условия вместе эквивалентны точности комплекса в $B \oplus C$, то есть полудекартовости квадрата, а это условие симметрично относительно отражения квадрата относительно оси AD. $\square$

Замечание 1. Четыре-лемма в обычной формулировке очевидным образом сводится к теореме 1. Пять-лемма, то есть лемма о пяти гомоморфизмах, напрямую следует из неё.