МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Y. Y.

Дата компиляции:
31 декабря 2023 года.

Оглавление

Нулевая глава

Предисловие

Общее описание

Этот текст представляет собой набор математических и околоматематических заметок, предназначенный в основном для меня, но, быть может, интересный и для других. Он в крайней степени сырой и постоянно переписывается и дописывается. Содержание, как правило, не выходит за рамки базовых университетских и школьных учебников.

Форматирование

Дизайн приспособлен для отображения на экране, а не печати на бумаге. В частности, несколько гротескный титульный лист нужен для того, чтобы превью на экранах электронных устройств были читаемыми и идентифицируемыми. Номера страниц в оглавлении кликабельны. В каждом разделе нумерация теорем, лемм и тому подобного начинается заново. Это сделано для того, чтобы разделы можно было с минимумом изменений копировать и вставлять в разные места текста.

Копирайт

Обратная связь

Связаться с автором можно по электронной почте `yymath@yandex.ru`.

Глобальные обозначения и соглашения

Обозначение 1 (Натуральные числа)**.** Вопрос о том, стоит ли начинать натуральные числа с нуля или с единицы, решается радикально: вводятся обозначения $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\mathbb{N}_1 := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}_{>0}$, а обозначение $\mathbb{N}$ не используется.

Замечание 1. Символ $\mathbb{Z}$ происходит от первой буквы немецкого слова «zahlen», означающего «числа».

Обозначение 2 (Включение подмножества)**.** Обозначение $X \subset Y$ означает, что X является подмножеством Y, не обязательно собственным.

Обозначение 3 (Множество конечных подмножеств)**.** Множество конечных подмножеств множества I иногда будет обозначаться символом $\Lambda(I)$.

Соглашение 1 (Отображение)**.** Отображение — это тройка, состоящая из области, кообласти и графика. Графика недостаточно, чтобы задать отображение, необходимо ещё указать кообласть.

Обозначение 4 (Семейство)**.** Символы $(a_i)_{i\in I}$ и $(a_i \mid i \in I)$ обозначают *семейство*, индексированное множеством I, которое теоретико-множественно представляет из себя множество упорядоченных пар (i, a_i), по одной для каждого $i \in I$, то есть график отображения из I, такого что $i \mapsto a_i$ для всех $i \in I$. Если $(X_i)_{i\in I}$ — семейство множеств, то элементы $\prod_{i\in I} X_i$ — это семейства $(a_i)_{i\in I}$, где $a_i \in X_i$ для всех $i \in I$.

Соглашение 2 (Кольцо)**.** Будем называть *кольцом* аддитивно записываемую абелеву группу, снабжённую биаддитивной, то есть двусторонне дистрибутивной, внутренней бинарной операцией умножения. Кольца с единицей называются *унитальными* кольцами. Гомоморфизмы между унитальными кольцами автоматически считаются унитальными, то есть переводящими единицу в единицу, и подкольца унитальных колец автоматически считаются унитальными с унитальными вложениями, если противное не указано явно.

Обозначение 5 (Единицы кольца)**.** Символ $R^\times$ обозначает группу *единиц*, то есть двусторонне мультипликативно обратимых элементов, ассоциативного унитального кольца R.

Обозначение 6 (Образ в экспоненциальном обозначении)**.** Образ подмножества $X \subset Y$ под действием отображения $y \mapsto y^\lambda : Y \to Z$ или $y \mapsto {}^\lambda y : Y \to Z$ будем обозначать через $X^{:\lambda} := \{x^\lambda \in Z \mid x \in X\}$ или ${}^{\lambda:}X := \{{}^\lambda x \in Z \mid x \in X\}$ соответственно.

Пример 1. Множество квадратов обратимых элементов ассоциативного унитального кольца R обозначается символом $(R^\times)^{:2}$. Если $H \subset G$ — подгруппа группы G, а $g \in G$, то ${}^{g:}H = gHg^{-1}$, где мы используем экспоненциальное обозначение для сопряжения.

Соглашение 3 (Левое и правое)**.** По умолчанию все действия, в частности, модули, считаются «левыми». Морфизмы в категориях компонуются справа налево.

Обозначение 7 (Двойственный модуль)**.** Если M — модуль над ассоциативным унитальным кольцом R, то символ $M^\vee$, как правило, будет обозначать абелеву группу $\mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(M, R)$.

Соглашение 4 (Компактность и хаусдорфовость)**.** Мы не включаем требование хаусдорфовости в определение компактного топологического пространства.

Обозначение 8 (Противоположная категория)**.** Если $\mathcal{C}$ — категория, то противоположная категория обозначается символом $\mathcal{C}^o$, где верхний индекс o — это не цифра 0 и не знак композиции $\circ$, а первая буква английского слова «opposite». Такое же обозначение применяется для колец, групп и тому подобного.

Соглашение 5 (Категория объектов над/под данным)**.** Пусть $\mathcal{C}$ — категория, а $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — её объект. Категория, объектами которой являются морфизмы из $\mathcal{C}$ с кообластью C, а морфизмами из $\varphi' : C' \to C$ в $\varphi'' : C'' \to C$ являются морфизмы $\alpha : C' \to C''$ из $\mathcal{C}$, удовлетворяющие условию $\varphi'' \circ \alpha = \varphi'$, компонуемые очевидным образом, обозначается $(\mathcal{C} \downarrow C)$ и обычно называется *категорией объектов над* C, а категория $(C \downarrow \mathcal{C}) := (\mathcal{C}^o \downarrow C)^o$ обычно называется *категорией объектов под* C.

Соглашение 6 (Категория колец над/под данным кольцом)**.** Исключениями из соглашения 5 являются подкатегории категории колец: для них смысл фраз «категория объектов над данным» и «категория объектов под данным» переставлен. Это сделано для согласованности с переходом к категории аффинных схем для категории коммутативных ассоциативных унитальных колец и согласованности с практикой применения фразы «алгебра над кольцом».

Соглашение 7 (Категория стрелок)**.** Соответствующая паре функторов $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E} : \rho$ «категория запятой» (англ. *comma category*) будет обозначаться $(\mathcal{C} \ {}^{\pi}{\downarrow}^{\rho}\ \mathcal{E})$ и называться *категорией стрелок*. Соглашение 5 описывает частный случай этой конструкции.

Обозначение 9 (Изоморфность)**.** Выражение типа $A \simeq B$ как правило означает, что A и B изоморфны, а выражение типа $A \cong B$ как правило означает, что между A и B есть единственный или однозначно определённый контекстом изоморфизм.

Часть I

Подкорректированные старые тексты

Глава 1

Неотсортированное

1.1. Локализация кольца

Определение и задание локализации кольца

Определение 1 (Локализация кольца)**.** Пусть дано отображение множества S в ассоциативное унитальное кольцо R. Определим *локализацию* R по S, обозначаемую $S^{-1}R$, как начальный объект в категории ассоциативных унитальных колец над R, в которых образы элементов S обратимы.

Замечание 1. Кольцо $S^{-1}R$ иногда обозначается через R_S или $R[S^{-1}]$. Если $S = R\backslash\mathfrak{p}$ — теоретико-множественное дополнение простого идеала $\mathfrak{p} \subset R$, то вместо R_S часто пишут $R_\mathfrak{p}$.

Наблюдение 1 (Задание локализации)**.** Ясно, что локализация ассоциативного унитального кольца R по множеству $S \subset R$ может быть задана добавлением к R семейства переменных $(X_s)_{s\in S}$ и факторизацией по семейству соотношений $(X_s s = sX_s = 1)_{s\in S}$.

Наблюдение 2. Очевидно, что локализация по множеству совпадает с локализацией по его образу в кольце, которая совпадает с локализацией по мультипликативному моноиду, порождённому образом.

Определение 2 (Мультипликативное множество)**.** Подмоноид в мультипликативном моноиде ассоциативного унитального кольца называется *мультипликативным множеством.*

Конструкция локализации коммутативного кольца

Построение множества

Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, а $S \subset A$ — мультипликативное множество. Рассмотрим множество пар $(a, s) \in A \times S$, первые элементы которых будем называеть *числителями*, а вторые — *знаменателями*, и введём на нём отношение эквивалентности, порождённое следующими соотношениями: $(a, s) \sim (ra, rs)$ для любых $a \in A$, $s, r \in S$. Класс эквивалентности пары (a, s) относительно этого отношения эквивалентности будем называть *дробью* и обозначать $\frac{a}{s}$.

Задание операций

Определим сложение и умножение дробей следующими формулами:

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + s_1 a_2}{s_1 s_2}, \qquad \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}.$$

Сразу видно, что это определение корректно — для этого достаточно проверить, что при замене в формулах $\frac{a_1}{s_1}$ на $\frac{sa_1}{ss_1}$, где $s \in S$, результат операций не меняется. Множество дробей с данными операциями образует ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, снабжённое структурой A-алгебры с помощью гомоморфизма $a \mapsto \frac{a}{1}$, где $a \in A$, и удовлетворяющее универсальному свойству локализации. В частности, обратным элементом к образу $s \in S$, равному $\frac{s}{1}$, является дробь $\frac{1}{s}$.

Явное описание отношения эквивалентности

Отношение эквивалентности на парах $(a, s) \in A \times S$ можно описать в более явном виде: $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \iff \exists s \in S : ss_2a_1 = ss_1a_2$. Можно проверить, что это описание определяет отношение эквивалентности:

$$\begin{matrix} s_{12}s_2a_1 = s_{12}s_1a_2 \\ \text{и} \\ s_{23}s_3a_2 = s_{23}s_2a_3 \end{matrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} &s_{12}s_{23}\, s_2s_3a_1 = \\ &= s_{12}s_{23}\, s_1s_3a_2 = \\ &= s_{12}s_{23}\, s_1s_2a_3 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix} s_{13}s_3a_1 = s_{13}s_1a_3, \\ \text{где } s_{13} \coloneqq s_{12}s_{23}s_2. \end{matrix}$$

Сразу видно, что данное отношение эквивалентности совпадает с отношением эквивалентности, определённым нами ранее.

Соответствие между идеалами при локализации

Обозначение 1. Пусть дано отображение множества S в ассоциативное унитальное кольцо R. Двусторонний идеал в $S^{-1}R$, порождённый образом двустороннего идеала $\mathfrak{I} \subset R$, будем обозначать через $S^{-1}\mathfrak{I}$.

Обозначение 2. Если $f : R \to E$ — гомоморфизм ассоциативных унитальных колец, а $\mathfrak{I} \subset E$ — двусторонний идеал, то идеал $f^{-1}(\mathfrak{I})$ иногда будем обозначать через $R \cap \mathfrak{I}$.

Наблюдение 3 (Локализация коммутирует с факторизацией)**.** Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо, $S \subset R$ — множество, а $\mathfrak{I} \subset R$ — двусторонний идеал. Тогда, по универсальным свойствам факторизации и локализации, существует единственный изоморфизм $(S^{-1}R)/(S^{-1}\mathfrak{I}) \cong S^{-1}(R/\mathfrak{I})$ колец над R.

Наблюдение 4 (Ядро локализации)**.** Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, а $S \subset A$ — мультипликативное множество. Воспользовавшись явной конструкцией локализации нетрудно убедиться, что $\ker(A \to S^{-1}A) = \{a \in A \mid \exists s \in S : sa = 0\}$.

Наблюдение 5 (Соответствие для общих идеалов)**.** Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, $S \subset A$ — мультипликативное множество, а $\mathfrak{a} \subset A$ и $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ — идеалы. Тогда $S^{-1}\mathfrak{a} = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \mathfrak{a},\ s \in S\}$, и выполняются следующие равенства:

$$S^{-1}(A \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}, \text{ так как } \frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} \in \mathfrak{b} \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{1} = \frac{a}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{b} \;\Leftrightarrow\; a \in A \cap \mathfrak{b};$$

$$\begin{aligned} A \cap (S^{-1}\mathfrak{a}) &= \ker(A \to S^{-1}A \to (S^{-1}A)/(S^{-1}\mathfrak{a})) = \\ &= \ker(A \to A/\mathfrak{a} \to S^{-1}(A/\mathfrak{a})) = \{a \in A \mid \exists s \in S : sa \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, а $S \subset A$ — мультипликативное множество.*

а) *Если в кольце A все делители нуля нильпотентны или все делители нуля равны нулю, то то же верно и для кольца $S^{-1}A$.*

б) *Если в кольце A все делители нуля нильпотентны и $0 \notin S$, то канонический гомоморфизм $A \to S^{-1}A$ инъективен.*

Доказательство.

а) Из того, что $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ — делитель нуля, следует, что $a \in A$ — делитель нуля, откуда, по условию, следует, что $a \in A$ — нильпотент/ноль, откуда следует, что $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ — нильпотент/ноль.

б) Если $\ker(A \to S^{-1}A) \neq 0$, то S содержит делители нуля, следовательно, S содержит нильпотенты, но $0 \notin S$ — противоречие. □

Следствие 1 (Соответствие для простых и примарных идеалов)**.** *Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, а $S \subset A$ — мультипликативное множество. Тогда соответствие Галуа между идеалами кольца A и идеалами кольца $S^{-1}A$, индуцированное каноническим гомоморфизмом $A \to S^{-1}A$, индуцирует биекцию между простыми/примарными идеалами A, дизъюнктными с S, и простыми/примарными идеалами $S^{-1}A$.*

Насыщенные мультипликативные множества

Определение 3 (Сатурация мультипликативного множества)**.** Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, а $S \subset A$ — мультипликативное множество. Определим *насыщение* или *сатурацию* S как $S^{\mathrm{sat}} := \{a \in A \mid \exists s \in S : a \mid s\} = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in (S^{-1}A)^{\times}\}$. Множество S^{sat} мультипликативно. Если $S = S^{\mathrm{sat}}$, то S называется *насыщенным* или *сатурированным* мультипликативным множеством.

Наблюдение 6. Нетрудно убедится, что насыщенные мультипликативные множества — это в точности дополнения объединений семейств простых идеалов.

1.2. Теорема Гильберта о нулях

Лемма 1. *Пусть ассоциативное коммутативное унитальное целостное кольцо B цело над своим подкольцом A. Тогда A является полем тогда и только тогда, когда B является полем.*

Доказательство. Пусть B — поле, $0 \neq a \in A$. Так как элемент $a^{-1} \in B$ целый над A, то существует соотношение $a^{-n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a^{-i}$, где $n \in \mathbb{N}_1$, $a_i \in A$ для любого $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Умножив обе стороны соотношения на a^{n-1}, получаем, что $a^{-1} \in A$.

Пусть A — поле, $0 \neq b \in B$. Так как элемент b целый над A, то существует соотношение $b^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$, где $n \in \mathbb{N}_1$, $a_i \in A$ для любого $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Сокращая на степень b, можно предположить, что $a_0 \neq 0$. Из соотношения $b(b^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i b^{i-1}) = a_0$ получаем обратимость b. □

Лемма 2. *Пусть k — поле, $f \in k[X_i \,|\, i \in I]$, где I — конечное множество. Если локализация $k[X_i \,|\, i \in I][f^{-1}]$ является полем, то $I = \varnothing$.*

Доказательство. Можно предположить, что $f \notin k$. Из элементов кольца $k[X_i \,|\, i \in I]$ обратимыми в $k[X_i \,|\, i \in I][f^{-1}]$ становятся в точности делители степеней f, а, например, $(f-1) \nmid f^n$ для любого $n \geqslant 0$, так как $f^n \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod{(f-1)}$. □

Лемма 3 (Лемма Зарисского)**.** *Если поле K является конечно порождённой алгеброй над полем $k \subset K$, то K цело, или, эквивалентно, конечно над k.*

Первое доказательство.

а) Пусть $K = k[t_i \,|\, i \in I]$, где $(t_i)_{i \in I}$ — конечное семейство элементов алгебры K;

б) Пусть $(t_j)_{j \in J}$, где $J \subset I$, — максимальное алгебраически независимое подсемейство семейства $(t_i)_{i \in I}$;

с) Пусть $P_i \in k[t_j \,|\, j \in J][T_i]$ для каждого $i \in I \setminus J$ — какое-то нетривиальное алгебраическое соотношение между t_i и $(t_j)_{j \in J}$;

д) Пусть $f_i \in k[t_j \,|\, j \in J]$ — старший по T_i коэффициент P_i;

е) Пусть $f \coloneqq \prod_{i \in I \setminus J} f_i \in k[t_j \,|\, j \in J]$.

Тогда поле K цело над над кольцом $k[t_j \,|\, j \in J][f^{-1}]$, откуда, по лемме 1, кольцо $k[t_j \,|\, j \in J][f^{-1}]$ является полем, откуда, по лемме 2, $J = \varnothing$. □

Набросок второго доказательства. Аналогичный предыдущему аргумент с применением леммы Нётер о нормализации и леммы 1. □

Теорема 1 (Nullstellensatz)**.** *Пусть k — поле, k^{alg} — его алгебраическое замыкание, A — конечно порождённая ассоциативная коммутативная унитальная алгебра над k. Тогда максимальные идеалы $\mathfrak{m} \subset A$ — это в точности ядра гомоморфизмов $A \to k^{\mathrm{alg}}$ над k.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m} \subset A$ — максимальный идеал. Тогда поле $A/\mathfrak{m}$ является конечным расширением поля k по лемме Зарисского, следовательно, вкладывается в k^{alg} над k. Идеал $\mathfrak{m}$ является ядром сквозного гомоморфизма $A \to A/\mathfrak{m} \to k^{\mathrm{alg}}$.

Пусть $\varphi : A \to k^{\mathrm{alg}}$ — гомоморфизм над k. Так как k-алгебра k^{alg} целостная и целая над k, то её подалгебра $\varphi(A)$ — тоже, поэтому $\varphi(A)$ является полем по лемме 1. □

Следствие 1 («Сильная теорема о нулях»)**.** *Пусть k — поле, k^{alg} — его алгебраическое замыкание, A — конечно порождённая ассоциативная коммутативная унитальная алгебра над k, а $f \in A$ — элемент A. Если для любого гомоморфизма $\varphi : A \to k^{\mathrm{alg}}$ над k выполняется равенство $\varphi(f) = 0$, то f — нильпотент.*

Доказательство. Пусть A_f — локализация A по f. Алгебра A_f является конечно порождённой алгеброй над k: в качестве её образующих можно взять f^{-1} и образующие A, но k-гомоморфизмов $A_f \to k^{\mathrm{alg}}$ не существует. Следовательно, $A_f = 0$, то есть $f \in A$ — нильпотент. □

1.3. Теорема, разложение и кольцо Витта

Теорема Витта

Определение 1 (Ортогональное пространство)**.** Линейное пространство, снабжённое симметрической билинейной формой, будем называть *ортогональным пространством.*

Определение 2 (Изотропное пространство)**.** Ортогональное пространство, структурная билинейная форма которого нулевая, называется *изотропным пространством.*

Определение 3 (Совершенное спаривание)**.** Назовём спаривание $v \otimes w \mapsto \langle v, w\rangle : P \otimes_K Q \to K$, где P и Q — это векторные пространства над полем K, *совершенным*, если индуцированные отображения $\lambda : P \to Q^\vee$, $v \mapsto \langle v, -\rangle$ и $\rho : Q \to P^\vee$, $w \mapsto \langle -, w\rangle$ биективны.

Наблюдение 1. Отображения λ и ρ из определения 3 выражаются друг через друга с помощью канонических гомоморфизмов $\epsilon_P : P \to (P^\vee)^\vee$ и $\epsilon_Q : Q \to (Q^\vee)^\vee$ следующим образом: $\lambda = \rho^\vee \circ \epsilon_P$ и $\rho = \lambda^\vee \circ \epsilon_Q$.

Определение 4 (Гиперболическое дополнение)**.** Два изотропных подпространства ортогонального пространства называются *гиперболическими дополнениями* друг друга, если ограничение билинейной формы определяет совершенное спаривание между ними.

Наблюдение 2. Пусть V — векторное пространство над полем K, снабжённое сюръективным гомоморфизмом $V \to V^\vee$, а P и Q — его подпространства. Так как отображение ограничения $V^\vee \to P^\vee$ сюръективно, то сквозное отображение $Q \to V \to V^\vee \to P^\vee$ биективно тогда и только тогда, когда Q является дополнением к $P^\perp := \ker(V \to P^\vee)$ в V.

Теорема 1. *Пусть V — невырожденное конечномерное ортогональное пространство над полем K, где $\mathrm{char}(K) \neq 2$, а $P \subset V$ — его изотропное подпространство. Тогда у P есть гиперболическое дополнение.*

Доказательство. Пусть $Q \subset V$ — произвольное дополнение к $P^\perp$ в V, то есть $V = P^\perp \oplus Q = P \oplus Q^\perp$. Пусть $T : Q \to Q^\perp$, $v \mapsto v^T$ — проекция вдоль P. Определим подпространство $M := \{(1/2)(v + v^T) \in V \mid v \in Q\}$. Тогда M, как и Q, является дополнением к $P^\perp$ в V, потому что для любого $v \in Q$ соответствующий вектор $(1/2)(v + v^T) \in M$ отличается от вектора v на вектор из $P \subset P^\perp$. С другой стороны, пространство M изотропно: для любых векторов $v, w \in Q$ выполняются равенства $\langle v + v^T, w + w^T\rangle = \langle v - v^T, w - w^T\rangle = 0$, так как $\langle v, w^T\rangle = \langle v^T, w\rangle = 0$, а векторы $v - v^T$ и $w - w^T$ лежат в изотропном пространстве P. □

Наблюдение 3. В ортогональном пространстве V дополнения к $V^\perp$, то есть к ядру формы, — это в точности максимальные элементы множества подпространств в V с тривиальным ядром индуцированной формы. Проектирования вдоль $V^\perp$ задают изометрии между ними.

Лемма 1. *Пусть $U' \subset V'$ и $U'' \subset V''$ — две пары вложенных конечномерных ортогональных пространств над полем K, где $\mathrm{char}(K) \neq 2$, причём V' — это минимальное невырожденное подпространство в V', содержащее U', и аналогично для пары $U'' \subset V''$. Тогда любая изометрия $\varphi : U' \xrightarrow{\sim} U''$ продолжается до изометрии $V' \xrightarrow{\sim} V''$.*

Доказательство. Пусть $P' \subset U'$ — это ядро формы на U', и аналогично $P'' = \varphi(P') \subset U''$. Пусть $L' \subset U'$ — это дополнение к P' в U', и аналогично $L'' := \varphi(L') \subset U''$. Пусть $Q' \subset V'$ — это гиперболическое дополнение к P' в ортогональном дополнении к L' в V', и аналогично для $Q'' \subset V''$.

Тогда мы имеем разложения $V' = P' \oplus Q' \oplus L'$ и $V'' = P'' \oplus Q'' \oplus L''$, и утверждение леммы становится очевидным. $\square$

Теорема 2 (Теорема Витта)**.** *Пусть V — невырожденное конечномерное ортогональное пространство над полем K, где $\mathrm{char}(K) \neq 2$, а $\varphi : U' \xrightarrow{\sim} U''$ — изометрия между двумя его подпространствами. Тогда φ может быть продолжена до автоизометрии V.*

Набросок доказательства. В качестве первого шага рассмотрим случай одномерных невырожденных U' и U''. Изометрия $\varphi : U' \xrightarrow{\sim} U''$ может быть продолжена до автоизометрии пространства $U' + U'' \subset V$, которая может быть продолжена до автоизометрии произвольного минимального невырожденного подпространства $U \subset V$, содержащего $U' + U''$, которая может быть продолжена до автоизометрии V, фиксирующей ортогональное дополнение к U.

Теперь рассмотрим случай невырожденных U' и U'' размерности строго большей единицы. Так как пространство U' содержит собственное нетривиальное невырожденное подпространство, то мы можем по индукции свести этот случай к предыдущему с помощью рассмотрения ортогональных дополнений.

Случай произвольных U' и U'' сводится к случаю невырожденных U' и U'' рассмотрением минимального невырожденного подпространства в V, содержащего U', и минимального невырожденного подпространства в V, содержащего U''. $\square$

Разложение Витта

Определение 5 (Гиперболическое и анизотропное пространства)**.** Ортогональное пространство называется *гиперболическим*, если оно является суммой двух изотропных подпространств, являющихся гиперболическими дополнениями друг друга, и *анизотропным*, если в нём нет нетривиальных изотропных подпространств.

Лемма 2. *Пусть V — невырожденное конечномерное ортогональное пространство над полем K, где $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Тогда все максимальные изотропные подпространства пространства V изоморфны.*

Доказательство. Следствие теоремы 2 (теоремы Витта). $\square$

Лемма 3. *Пусть V — невырожденное конечномерное ортогональное пространство над полем K, где $\operatorname{char}(K) \neq 2$, а $P, Q, L \subset V$ — его подпространства, причём P и Q — изотропные гиперболические дополнения друг друга, а L — ортогональное дополнение к $P \oplus Q$ в V. Тогда P является максимальным изотропным подпространством пространства V тогда и только тогда, когда пространство L анизотропно.*

Доказательство. Так как $P \oplus L \subset P^{\perp}$ и $P^{\perp} \cap Q = 0$, то $P^{\perp} = P \oplus L$. Все изотропные подпространства пространства V, содержащие P, содержатся в $P^{\perp} = P \oplus L$. Подпространства пространства $P \oplus L$, содержащие P, очевидным образом взаимно однозначно соответствуют подпространствам пространства L, причём это соответствие сопоставляет изотропным подпространствам изотропные подпространства. □

Теорема 3 (Разложение Витта)**.** *Пусть V — конечномерное ортогональное пространство над полем K, где $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Тогда существует тройка $(V_{\mathrm{iso}}, V_{\mathrm{hyp}}, V_{\mathrm{ani}})$ подпространств V, таких что V_{iso} изотропно, V_{hyp} гиперболично, V_{ani} анизотропно, а V является их попарно ортогональной прямой суммой. Группа автоизометрий V транзитивно действует на таких упорядоченных тройках.*

Доказательство. Из наблюдения 3 сразу видно, что V_{iso} определяется однозначно как ядро билинейной формы на V, а $V_{\mathrm{hyp}} \oplus V_{\mathrm{ani}}$ — это одно из его изометричных невырожденных дополнений. Остальное следует из теоремы 1, леммы 2, леммы 3 и теоремы 2 (теоремы Витта). □

Кольцо Витта

Теорема Витта о сокращении

Обозначение 1 (Ортогональная прямая сумма)**.** Ортогональную прямую сумму ортогональных пространств V' и V'' над полем K будем обозначать символом $V' \oplus_{\perp} V''$.

Теорема 4 (Теорема Витта о сокращении)**.** *Пусть V, V' и V'' — три невырожденных конечномерных ортогональных пространства над полем K, где $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Тогда если $V \oplus_{\perp} V'$ изометрично $V \oplus_{\perp} V''$, то V' изометрично V''.*

Доказательство. Следствие теоремы 2 (теоремы Витта). □

Пара слов о кольце Витта

На тензорном произведении пространств с билинейной формой очевидным образом вводится билинейная форма. Классы изометричности невырожденных конечномерных ортогональных пространств над фиксированным полем характеристики не равной двум образуют полукольцо относительно операций ортогональной прямой суммы и тензорного произведения. Из любого полукольца существует универсальный гомоморфизм в кольцо, который в данном случае является инъективным, благодаря теореме Витта о сокращении. Для нашего полукольца соответствующее кольцо называется *кольцом Витта-Гротендика* поля коэффициентов. Целочисленные кратные класса гиперболической плоскости образуют идеал в этом кольце, фактор по которому называется *кольцом Витта* поля коэффициентов.

Для любого невырожденного конечномерного ортогонального пространства аддитивное обращение его билинейной формы отвечает аддитивному обращению соответствующего элемента кольца Витта. Нетрудно убедиться, что элементы кольца Витта взаимно однозначно соответствуют классам изометричности конечномерных и анизотропных ортогональных пространств. Кольцо Витта поля вещественных чисел изоморфно кольцу целых чисел.

1.4. Целое замыкание

Соглашение 1. В этом параграфе все кольца и алгебры считаются ассоциативными, коммутативными и унитальными, если противное не указано явно.

Определение 1 (Конечная алгебра)**.** Алгебра над кольцом A называется *конечной* над A, если она конечно порождена как A-модуль.

Теорема 1 (Джойн двух конечных подалгебр конечен)**.** *Пусть B — алгебра над кольцом A, а C и D — две её конечные подалгебры. Тогда джойн C и D в решётке подалгебр алгебры B конечен над A.*

Доказательство. Джойн C и D является образом индуцированного гомоморфизма $C \otimes_A D \to B$, а тензорное произведение конечно порождённых модулей является конечно порождённым модулем. $\square$

Определение 2 (Целое замыкание)**.** Пусть B — алгебра над кольцом A. Объединение конечных подалгебр алгебры B называется *целым замыканием* A в B. По теореме 1 оно является подалгеброй в B.

Определение 3 (Целый элемент)**.** Пусть B — алгебра над кольцом A. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если порождённая им подалгебра $A[b] \subset B$ конечна над A, или, эквивалентно, b является корнем унитарного многочлена с коэффициентами в A, то есть $b^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$ для какого-то $n \in \mathbb{N}_1$ и каких-то $a_i \in A$, где $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Теорема 2 (Все элементы конечной алгебры целые)**.** *Пусть B — конечная алгебра над кольцом A. Тогда любой элемент $b \in B$ является целым над A.*

Доказательство. Если кольцо A нётерово, например, является полем или кольцом $\mathbb{Z}$, то теорема верна автоматически. В общем случае нужно применить к эндоморфизму $x \mapsto bx : B \to B$ конечно порождённого A-модуля B теорему Гамильтона-Кэли. □

Следствие 1. *Пусть B — алгебра над кольцом A. Тогда целое замыкание A в B состоит в точности из элементов B, целых над A.*

1.5. Теорема Гамильтона-Кэли

Формулировка и доказательство

Теорема 1 (Теорема Гамильтона-Кэли)**.** *Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_{A\text{-mod}}(A^I)$, где I — конечное множество, а A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо. Тогда φ является корнем своего характеристического многочлена.*

Доказательство. Эндоморфизм φ индуцирует на $V := A^I$ структуру $A[X]$-модуля, которая индуцирует на V^I структуру $\mathrm{Mat}_I(A[X])$-модуля. Пусть $(e_i)_{i\in I}$ — стандартный A-базис V, рассмотренный как элемент V^I, а $s := (X\delta_{i,j} - a_{i,j})_{i,j\in I} = X - (a_{i,j})_{i,j\in I} \in \mathrm{Mat}_I(A[X])$, где $(a_{i,j})_{i,j\in I}$ — матрица φ в базисе $(e_i)_{i\in I}$, а $\delta_{i,j}$ — дельта Кронекера. Тогда $s\cdot(e_i)_{i\in I} = 0$. Умножив это равенство слева на присоединённую матрицу к s, получаем, что $\det(s)\cdot(e_i)_{i\in I} = (\det(s)\cdot e_i)_{i\in I} = 0$, то есть многочлен $\det(s) \in A[X]$ зануляет A-базис V, а потому и всё V, что и требовалось доказать. □

Замечание 1. Присоединённая матрица к матрице $x = (x_{i,j})_{i,j \in I}$ определяется так: $\operatorname{adj}(x) \coloneqq (\sum_{\{\sigma \in \operatorname{Aut}(I) \mid \sigma(j)=i\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k \in I \setminus \{j\}} x_{k,\sigma(k)})_{i,j \in I}$.

Замечание 2. Приведённое доказательство теоремы Гамильтона-Кэли не единственное возможное.

Наблюдение 1. Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, V — конечно порождённый A-модуль, а $\varphi \in \operatorname{End}_{A\text{-mod}}(V)$. По определению V существует сюръективный гомоморфизм $\pi : A^I \to V$, где I — какое-то конечное множество. По проективности A^I существует эндоморфизм $\widetilde{\varphi} \in \operatorname{End}_{A\text{-mod}}(A^I)$, такой что $\varphi \circ \pi = \pi \circ \widetilde{\varphi}$, называемый поднятием φ. Для любого такого $\widetilde{\varphi}$ любой многочлен из $A[X]$, зануляющий $\widetilde{\varphi}$, например, характеристический многочлен $\widetilde{\varphi}$, зануляет и φ.

Дополнение

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \operatorname{End}_{A\text{-mod}}(A^n)$, где $n \in \mathbb{N}_0$, а A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо. Тогда характеристический многочлен φ равен $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{tr}(\bigwedge^i \varphi) X^{n-i} \in A[X]$.*

Набросок доказательства. Двойной счёт по множеству пар, состоящих из перестановки n-элементного множества и подмножества в множестве её фиксированных точек. □

Наблюдение 2. Пусть $B \coloneqq A[X]/(P(X))$, где A — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, а $P(X) \in A[X]$ — унитарный многочлен. Пусть $x \in B$ — это образ $X \in A[X]$. Очевидно, что множество $\{x^i \in B \mid 0 \leqslant i \leqslant \deg(P(X)) - 1\}$ является A-базисом B. Идеал многочленов в $A[X]$, зануляющих оператор $x : B \to B$, $f \mapsto xf$, равен $(P(X))$, как сразу видно прямо из определения B. В частности, характеристический многочлен x равен $P(X)$.

Часть II

Относительно новые тексты

Глава 2

Вещественные числа

2.1. Сечения Дедекинда

Дедекиндовы пары и леммы об обратимости

Определение 1 (Левые и правые сечения Дедекинда)**.** Назовём подмножество R линейно упорядоченного множества X *правым сечением Дедекинда*, если оно непустое и собственное, не имеет минимального элемента, и если для любых $r \in R$ и $x \in X$, таких что $r \leqslant x$, выполняется включение $x \in R$. Назовём подмножество $L \subset X$ *левым сечением Дедекинда*, если оно является правым сечением Дедекинда относительно противоположного порядка на X.

Определение 2 (Дедекиндовы дополнения и пары)**.** Пусть X — это $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}_{>0}$. Левое сечение Дедекинда $L \subset X$ и правое сечение Дедекинда $R \subset X$ называются *дедекиндовыми дополнениями* друг друга, а пара (L, R) — *дедекиндовой парой*, если $L \cap R = \varnothing$, и для любого рационального $\varepsilon > 0$ существуют $l \in L$ и $r \in R$, такие что $r - l \leqslant \varepsilon$.

Наблюдение 1. Пусть X — это $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}_{>0}$. Дизъюнктные левое сечение Дедекинда $L \subset X$ и правое сечение Дедекинда $R \subset X$ являются дедекиндовыми дополнениями друг друга тогда и только тогда, когда для любого рационального $\varepsilon > 0$ открытая ε-окрестность множества L имеет непустое пересечение с R, то есть $\{x \in X \mid \exists l \in L : |x - l| < \varepsilon\} \cap R \neq \varnothing$, или, эквивалентно, открытая ε-окрестность множества R имеет непустое пересечение с L, то есть $L \cap \{x \in X \mid \exists r \in R : |x - r| < \varepsilon\} \neq \varnothing$.

Эти условия эквивалентны тому, что L — максимальное по включению левое сечение Дедекинда, дизъюнктное с R, а R — максимальное по включению правое сечение Дедекинда, дизъюнктное с L. Отсюда следует, что у любого левого/правого сечения Дедекинда в X существует единственное дедекиндово дополнение.

Определение 3 («Поэлементное» сложение, умножение и обращение подмножеств)**.** Для подмножеств $M, M', M'' \subset \mathbb{Q}$, в частности, левых или правых сечений Дедекинда, определим множества $-M := \{-x \in \mathbb{Q} \mid x \in M\}$, $M' + M'' := \{x' + x'' \in \mathbb{Q} \mid x' \in M',\ x'' \in M''\}$ и $M' \cdot M'' := \{x' \cdot x'' \in \mathbb{Q} \mid x' \in M',\ x'' \in M''\}$. Если $M \subset \mathbb{Q}^{\times}$, то определим множество $M^{:(-1)} := \{x^{-1} \in \mathbb{Q} \mid x \in M\}$.

Определение 4 (Сложение дедекиндовых пар в $\mathbb{Q}$)**.** Пусть (L', R') и (L'', R'') — дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}$. Определим их сумму как дедекиндову пару $(L' + L'', R' + R'')$.

Наблюдение 2. Дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}$ образуют абелеву группу относительно сложения. Нулём в этой группе является пара $(\mathbb{Q}_{<0}, \mathbb{Q}_{>0})$, а аддитивно обратной к паре (L, R) является пара $(-R, -L)$.

Лемма 1. *Пусть (L, R) — дедекиндова пара в $\mathbb{Q}_{>0}$. Тогда $(R^{:(-1)}, L^{:(-1)})$ — это дедекиндова пара в $\mathbb{Q}_{>0}$.*

Набросок доказательства. Заметим, что существует $C \in \mathbb{Q}_{>0}$, такое что если $l \in L$ и $r \in R$ достаточно близки, то $C \leqslant l \leqslant r$, после чего воспользуемся тождеством $1/l - 1/r = (r - l)/(lr)$. □

Лемма 2. *Пусть (L', R') и (L'', R'') — дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}_{>0}$. Тогда $(L' \cdot L'', R' \cdot R'')$ — это дедекиндова пара в $\mathbb{Q}_{>0}$.*

Набросок доказательства. Заметим, что существует $C' \in \mathbb{Q}_{>0}$, такое что если $l' \in L'$ и $r' \in R'$ достаточно близки, то $l' \leqslant r' \leqslant C'$, и аналогично для пары (L'', R''), после чего воспользуемся тождеством $r'r'' - l'l'' = r'(r'' - l'') + (r' - l')l''$. □

Определение 5 (Умножение дедекиндовых пар в $\mathbb{Q}_{>0}$)**.** Пусть (L', R') и (L'', R'') — дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}_{>0}$. Определим их произведение как дедекиндову пару $(L' \cdot L'', R' \cdot R'')$.

Наблюдение 3. Дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}_{>0}$ образуют коммутативную группу относительно умножения. Единицей в этой группе является пара $(\{x \in \mathbb{Q}_{>0} \mid x < 1\}, \{x \in \mathbb{Q}_{>0} \mid 1 < x\})$, а мультипликативно обратной к паре (L, R) является пара $(R^{:(-1)}, L^{:(-1)})$.

Конструкция поля дедекиндовых сечений

Определение 6 (Сечение Дедекинда)**.** Правые сечения Дедекинда в $\mathbb{Q}$ будем называть просто *сечениями Дедекинда.*

Определение 7 (Отношение порядка на сечениях Дедекинда)**.** Стандартным порядком на множестве сечений Дедекинда будем считать порядок, противоположный порядку, заданному вложенностью сечений друг в друга как множеств.

Наблюдение 4. Легко видеть, что порядок на множестве сечений Дедекинда линейный и полный: инфимумам соответствуют объединения.

Определение 8 (Сложение сечений Дедекинда)**.** Суммой сечений Дедекинда R' и R'' назовём сечение Дедекинда $R' + R''$.

Наблюдение 5. Сечения Дедекинда образуют упорядоченную аддитивную абелеву группу. Аддитивная обратимость любого сечения Дедекинда следует из наблюдения 2.

Определение 9 (Умножение неотрицательных сечений Дедекинда)**.** Пусть R' и R'' — неотрицательные, то есть такие, что $R' \geqslant 0$ и $R'' \geqslant 0$, сечения Дедекинда. Определим их произведение как неотрицательное сечение Дедекинда $R' \cdot R''$.

Наблюдение 6. Множество неотрицательных сечений Дедекинда образует полукольцо с нулём. Если мы отождествим множество всех сечений Дедекинда с кольцом Гротендика, то есть кольцом формальных разностей, этого полукольца, то увидим, что операция умножения неотрицательных сечений Дедекинда однозначно двусторонне дистрибутивно продолжается на множество всех сечений Дедекинда, превращая его в упорядоченное кольцо.

Наблюдение 7. По наблюдению 3 строго положительные, то есть строго большие нуля, сечения Дедекинда мультипликативно обратимы, откуда следует, что кольцо сечений Дедекинда является полем. Часто оно отождествляется с полем *вещественных чисел*, также называемых *действительными числами*, и обозначается символом $\mathbb{R}$.

Единственность порядкого полного линейно упорядоченного поля

Наблюдение 8. Любое линейно упорядоченное поле имеет характеристику ноль.

Определение 10 (Архимедово поле)**.** Линейно упорядоченное поле $\mathcal{R}$ называется *архимедовым*, если множество $\mathbb{Z} \subset \mathcal{R}$ не ограничено в $\mathcal{R}$.

Наблюдение 9. Пусть $\mathcal{R}$ — архимедово линейно упорядоченное поле. Тогда для любого $a \in \mathcal{R}^{\times}$ множество $a\mathbb{Z} \subset \mathcal{R}$ не ограничено.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{R}$ — архимедово линейно упорядоченное поле. Тогда для любых $a, b \in \mathcal{R}$, таких что $a < b$, существует рациональное число $r \in \mathbb{Q}$, такое что $a < r < b$.*

Доказательство. По наблюдению 9 существует число $m \in \mathbb{N}_1$, такое что $m(b-a) > 1$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ — минимальный элемент $\mathbb{Z}$, такой что $ma < n$. Тогда $ma < n < mb$ и $a < n/m < b$. □

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{R}$ — порядкого полное линейно упорядоченное поле. Тогда $\mathcal{R}$ архимедово.*

Доказательство. Пусть $s \in \mathcal{R}$ — супремум $\mathbb{Z} \subset \mathcal{R}$. Так как $s - 1 < s$, то существует число $n \in \mathbb{Z}$, такое что $s - 1 < n$, откуда следует, что $s < n + 1$ — противоречие. □

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{R}$ — произвольное порядкого полное линейно упорядоченное поле, а $\mathcal{D}$ — поле сечений Дедекинда. Тогда существует единственный изоморфизм $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ линейно упорядоченных полей.*

Набросок доказательства. Во-первых, воспользовавшись теоремами 1 и 2, легко убедиться, что для любого $a \in \mathcal{R}$ множество $\{r \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$ принадлежит $\mathcal{D}$, а отображение $\mathcal{R} \to \mathcal{D}$, $a \mapsto \{r \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$ биективно и является сохраняющим порядок кольцевым гомоморфизмом.

Во-вторых, у поля $\mathcal{R}$ нет сохраняющих порядок нетривиальных автоморфизмов, так как их нет у $\mathbb{Q}$. □

2.2. Компактность и связность отрезка

Определение 1 (Интервал)**.** Назовём подмножество $I \subset X$ частично упорядоченного множества X *интервалом*, если для любых $x, y \in I$ и $z \in X$, таких что $x \leqslant z \leqslant y$, выполняется включение $z \in I$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U} \subset \mathrm{Open}([0,1])$ — множество открытых подмножеств отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$, такое что $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ замкнуто в $[0,1]$ и не пусто. Тогда $[0,1]$ является конечным объединением элементов $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Так как объединение элементов $\mathcal{U}$ не пустое, то существует непустой интервал $I \subset [0,1]$, содержащийся в каком-то из элементов $\mathcal{U}$. Пусть $I_{\max} \subset [0,1]$ — это объединение интервалов, содержащих I и содержащихся в конечных объединениях элементов $\mathcal{U}$, а $C_{\inf} := \inf(I_{\max}) \in [0,1]$ и $C_{\sup} := \sup(I_{\max}) \in [0,1]$ — это инфимум и супремум $I_{\max}$. Тогда $C_{\inf}, C_{\sup} \in \mathrm{Cl}(I_{\max}) \subset \mathrm{Cl}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, поэтому существуют открытые в $[0,1]$ интервалы $I_{\inf} \ni C_{\inf}$ и $I_{\sup} \ni C_{\sup}$, содержащиеся в каких-то элементах $\mathcal{U}$. Так как $I_{\inf} \cap I_{\max} \neq \varnothing$ и $I_{\sup} \cap I_{\max} \neq \varnothing$, то существуют интервалы I_{left} и I_{right}, содержащие I и содержащиеся в конечных объединениях элементов $\mathcal{U}$, такие что $I_{\inf} \cap I_{\text{left}} \neq \varnothing$ и $I_{\sup} \cap I_{\text{right}} \neq \varnothing$. Тогда $I_{\text{big}} := I_{\inf} \cup I_{\text{left}} \cup I_{\text{right}} \cup I_{\sup}$ — это интервал, содержащий I и содержащийся в конечном объединении элементов $\mathcal{U}$. Если $C_{\inf} \neq 0$ или $C_{\sup} \neq 1$, то I_{big} строго больше $I_{\max}$, что противоречит определению $I_{\max}$. Поэтому $I_{\text{big}} = I_{\max} = [0,1]$. □

Следствие 1 (Компактность и связность отрезка)**.** *Единичный вещественный отрезок $[0,1] \subset \mathbb{R}$ компактен и связен.*

Доказательство. Компактность следует из теоремы 1, применённой для случая $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = [0,1]$, а связность — применённой для случая одноэлементного $\mathcal{U}$. □

Глава 3

Дифференциальное исчисление

3.1. Теорема Банаха о фиксированной точке

Определение 1 (Растяжение и липшицевость)**.** Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, а $\varphi : X \to Y$ — отображение. Инфимум $\lambda \in \mathbb{R}$, таких что $\rho_Y(\varphi(x'), \varphi(x'')) \leqslant \lambda \cdot \rho_X(x', x'')$ для всех $x', x'' \in X$, называется *растяжением* или *липшицевой нормой* φ. Если этот инфимум конечен, то отображение φ называется *липшицевым.*

Определение 2 (Равномерно сжимающее отображение)**.** Отображение между метрическими пространствами называется *равномерно сжимающим*, если его растяжение строго меньше единицы.

Теорема 1 (Теорема Банаха о фиксированной точке)**.** *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а $\varphi : X \to X$ — равномерно сжимающее отображение. Тогда у φ существует единственная фиксированная точка.*

Доказательство. Единственность очевидна — остальные точки обязаны приближаться к фиксированной. Теперь докажем существование. Обозначим растяжение φ через λ и выберем произвольную точку $x \in X$. Из неравенств $\rho(\varphi^{\circ(n+1)}(x), \varphi^{\circ(n+2)}(x)) \leqslant \lambda \cdot \rho(\varphi^{\circ n}(x), \varphi^{\circ(n+1)}(x))$, где $n \in \mathbb{N}_0$, следует, что расстояния между членами последовательности $(\varphi^{\circ n}(x))_{n=0}^{\infty}$ не больше расстояний между соответствующими членами последовательности $(c\cdot s_n)_{n=0}^{\infty}$, где $c := \rho(x,\varphi(x))$, $s_n := \sum_{i=1}^{n}\lambda^{i-1}$. Так как последовательность $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ сходится, то она является последовательностью Коши, откуда следует, что последовательность $(\varphi^{\circ n}(x))_{n=0}^{\infty}$ является последовательностью Коши, и, как следствие, сходится. Предел и будет фиксированной точкой, так как из непрерывности φ следует, что $\varphi(\lim_{n\to\infty}\varphi^{\circ n}(x)) = \lim_{n\to\infty}\varphi(\varphi^{\circ n}(x)) = \lim_{n\to\infty}\varphi^{\circ n}(x)$. $\square$

3.2. Теорема об обратной функции

Теорема 1 (Неравенство Лагранжа). *Пусть E — евклидово пространство, а $\gamma : [0,1] \to E$ — непрерывное отображение, дифференцируемое на интервале $(0,1)$. Тогда существует точка $x \in (0,1)$, такая что $|\gamma(1)-\gamma(0)| \leqslant \|D(\gamma)_x\|$.*

Набросок доказательства. Пусть L — это прямая, проходящая через $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$, а $\pi : E \to L$ — это ортогональная проекция на L. Так как дифференциалы π во всех точках имеют норму не больше 1, то замена γ на $\pi\circ\gamma$ сводит доказательство теоремы к случаю одномерного E, где она следует из классической теоремы Лагранжа о среднем. $\square$

Теорема 2. *Пусть E — это евклидово пространство, а $\varphi : E \to E$ — это дифференцируемое отображение, такое что $\varphi(0) = 0$, отображение $D(\varphi)_0$ биективно, а отображение $x \mapsto D(\varphi)_x : E \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-mod}}(E,E)$ непрерывно в нуле. Тогда существует открытая окрестность нуля $U \subset E$, такая что $\varphi(U)$ открыто, а $x \mapsto \varphi(x) : U \to \varphi(U)$ биективно.*

Доказательство. Сначала сделаем два наблюдения. Во-первых, для любого $y \in E$ решения уравнения $\varphi(x) = y$ совпадают с фиксированными точками отображения $\psi_y : E \to E$, $x \mapsto \varphi(x) + x - y$. Во-вторых, без потери общности можно предположить, что $D(\varphi)_0 = -\mathrm{Id}$, заменив φ на $(-(D(\varphi)_0)^{\circ(-1)})\circ\varphi$. Тогда $D(\psi_y)_0 = 0$ для всех $y \in E$.

Теперь зафиксируем два вещественных числа $\varepsilon, \rho > 0$, таких что $\varepsilon + \rho = 1$. Так как $D(\psi_0)_0 = 0$, а отображение $x \mapsto D(\psi_0)_x \mapsto \|D(\psi_0)_x\| : E \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-mod}}(E,E) \to \mathbb{R}$ непрерывно в нуле, то мы можем найти вещественное число $R > 0$, такое что для любого $x \in E$, удовлетворяющего условию $|x| \leqslant R$, выполняется неравенство $\|D(\psi_0)_x\| \leqslant \varepsilon$, экививалентное неравенству $\|D(\psi_y)_x\| \leqslant \varepsilon$ для произвольного $y \in E$.

Согласно неравенству Лагранжа (теорема 1) для любого $y \in E$ растяжение ограничения ψ_y на замкнутый шар $\{x \in E \mid |x| \leqslant R\}$ не превосходит ε. В частности, $|\psi_0(x)| \leqslant \varepsilon R$ для всех $x \in E$, таких что $|x| \leqslant R$, и $|\psi_y(x)| = |\psi_0(x) + y| < R$ для всех $x, y \in E$, таких что $|x| \leqslant R$ и $|y| < \rho R$.

Зафиксируем произвольный $y \in E$, такой что $|y| < \rho R$, и применим теорему Банаха о фиксированной точке к отображению $x \mapsto \psi_y(x) : \{x \in E \mid |x| \leqslant R\} \to \{x \in E \mid |x| \leqslant R\}$. Мы получим, что существует единственная точка $x \in E$, такая что $|x| \leqslant R$ и $\varphi(x) = y$, причём $|x| = |\psi_y(x)| < R$. Множество $U \coloneqq \{x \in E \mid |x| < R\} \cap \varphi^{-1}(\{y \in E \mid |y| < \rho R\})$, для которого $\varphi(U) = \{y \in E \mid |y| < \rho R\}$, подходит условию теоремы. $\square$

3.3. Равенство смешанных производных

Теорема 1 (Равенство смешанных производных). *Пусть $U = U' \times U'' \subset \mathbb{R}^2$ — открытая окрестность нуля, а $f : U \to \mathbb{R}$ — функция, такая что $f(0) = 0$, вторая частная производная $\partial_2\partial_1 f$ существует во всех точках U и непрерывна в нуле. Пусть $g : U \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) - f(0, x_2)$. Тогда $\partial_2\partial_1 f(0) = \lim_{x_1, x_2 \to 0}(g(x_1, x_2)/(x_1 x_2))$.*

Доказательство. Зафиксируем точку $(x_1, x_2) \in U$. Применив теорему Лагранжа о среднем к функции $\alpha \mapsto g(\alpha x_1, x_2) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, получаем, что $g(x_1, x_2) = x_1 \partial_1 g(\alpha_1 x_1, x_2)$ для какого-то $\alpha_1 \in (0, 1)$. Применив теорему Лагранжа о среднем к функции $\alpha \mapsto x_1 \partial_1 g(\alpha_1 x_1, \alpha x_2) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, получаем, что $g(x_1, x_2) = x_1 x_2 \partial_2\partial_1 g(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)$ для какого-то $\alpha_2 \in (0, 1)$. Заметив, что $\partial_2\partial_1 g = \partial_2\partial_1 f$ как функции на U, и устремив x_1 и x_2 к нулю, получаем, что $\partial_2\partial_1 f(0) = \lim_{x_1, x_2 \to 0}(g(x_1, x_2)/(x_1 x_2))$. $\square$

3.4. Лемма Адамара

Обозначение 1. Пусть $r \geqslant i \geqslant 0$ — целые числа. Символом C_r^i будем обозначать биноминальный коэффициент, равный $r!/(i!(r - i)!)$.

Наблюдение 1. Пусть $r \in \mathbb{N}_1$. В результате разложения выражения $(1 - 1)^r$ по биному Ньютона получается формула $\sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i = 0$.

Лемма 1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция класса C^r, где $r \in \mathbb{N}_1$, такая что $f(0) = 0$. Пусть $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)/x$, а $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда существуют вещественные числа $\alpha_i \in (0, 1)$, где $1 \leqslant i \leqslant r$, такие что*

$g^{(r-1)}(t) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}C_r^i f^{(r)}(\alpha_i t)$. *Помимо этого, если* f *класса* C^{r+1}, *то существуют вещественные числа* $\beta_i \in (0,1)$, *где* $1 \leqslant i \leqslant r$, *такие что* $g^{(r-1)}(t) = \frac{1}{r}f^{(r)}(0) + \frac{1}{r(r+1)}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}C_{r+1}^{i+1}f^{(r+1)}(\beta_i t)t$.

Доказательство. Применяя правило Лейбница, получаем равенство $g^{(r-1)}(t) = \sum_{i=1}^{r} C_{r-1}^{i-1}(-1)^{i-1}(i-1)!t^{-i}f^{(r-i)}(t)$. По теореме Тейлора для каждого $1 \leqslant i \leqslant r$ существует вещественное число $\alpha_i \in (0,1)$, такое что $f^{(r-i)}(t) = (\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{j!}f^{(r-i+j)}(0)t^j) + \frac{1}{i!}f^{(r)}(\alpha_i t)t^i$. Подставив это выражение в выражение для $g^{(r-1)}(t)$ и произведя необходимые сокращения, получаем первую формулу.

Вторая формула аналогичным образом получается подстановкой выражения $f^{(r-i)}(t) = (\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{j!}f^{(r-i+j)}(0)t^j) + \frac{1}{(i+1)!}f^{(r+1)}(\beta_i t)t^{i+1}$, где $\beta_i \in (0,1)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant r$, в выражение для $g^{(r-1)}(t)$. $\square$

Замечание 1. По первой формуле леммы 1 сразу вычисляется предел $\lim_{t\to 0} g^{(r-1)}(t) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}C_r^i f^{(r)}(0) = \frac{1}{r}f^{(r)}(0)$, а по второй — предел $\lim_{t\to 0}((g^{(r-1)}(t) - \frac{1}{r}f^{(r)}(0))/t) = \frac{1}{r(r+1)}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}C_{r+1}^{i+1}f^{(r+1)}(0) = \frac{1}{r(r+1)}(C_{r+1}^1 - C_{r+1}^0)f^{(r+1)}(0) = \frac{1}{r+1}f^{(r+1)}(0)$.

Теорема 1 (Лемма Адамара). *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— функция класса* C^r, *где* $r \in \mathbb{N}_1$, *а* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— ненулевая линейная функция, такая что* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid l(x) = 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. *Тогда существует единственная функция* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *класса* C^{r-1}, *такая что* $f = g \cdot l$.

Набросок доказательства. Мы можем предположить, что в $\mathbb{R}^n$ выбраны координаты, а l — это отображение $(x_i)_{i=1}^n \mapsto x_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Сначала рассмотрим случай $r = 1$. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, причём $x_1 \neq 0$. Тогда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1 = \partial_1 f(\alpha x_1, x_2, \dots, x_n)$ для какого-то $\alpha \in (0,1)$. Это показывает, что функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая переводит $x \in \mathbb{R}^n$ в $f(x)/l(x)$ при $l(x) \neq 0$, и в $\partial_1 f(x)$ при $l(x) = 0$, является непрерывной и подходит в качестве g. Единственность g очевидна.

Теперь рассмотрим случай $r \geqslant 2$. Пусть $(k_i)_{i=1}^n$ — семейство элементов $\mathbb{N}_0$, такое что $\sum_{i=1}^n k_i \leqslant r-1$. Нам нужно доказать, что функция $\partial_1^{k_1}\cdots\partial_n^{k_n}g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существует и непрерывна. Очевидная непосредственная проверка показывает, что функция $\hat{g} \coloneqq \partial_2^{k_2}\cdots\partial_n^{k_n}g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существует и является в точности единственной непрерывной функцией на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей равенству $\hat{f} = \hat{g}\cdot l$, где $\hat{f} \coloneqq \partial_2^{k_2}\cdots\partial_n^{k_n}f$.

Доказательство существования и непрерывности функции $\partial_1^{k_1}\hat{g}$ получается последовательным применением двух формул леммы 1 к ограничениям $\hat{f}$ на слои проекции $(x_i)_{i=1}^n \mapsto (x_i)_{i=2}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$. □

Следствие 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция класса C^r, где $r \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$, такая что $f(0) = 0$. Пусть $l_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, — стандартные координатные функции. Тогда существуют функции $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ класса C^{r-1}, где $1 \leqslant i \leqslant n$, такие что $f = \sum_{i=1}^n g_i \cdot l_i$.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по n. Введём обозначение $H \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_n(x) = 0\}$. По предположению индукции ограничение $f|_H : H \to \mathbb{R}$ представляется в виде $\sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}_i \cdot \hat{l}_i$, где $\hat{g}_i$ имеют класс C^{r-1}, а $\hat{l}_i$ — это стандартные координатные функции. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n-1$ возьмём $g_i \coloneqq \hat{g}_i \circ \pi$, где $\pi : \mathbb{R}^n \to H$ — стандартная проекция. По теореме 1 функция $f - (f|_H \circ \pi) = f - \sum_{i=1}^{n-1} g_i \cdot l_i$ представляется в виде $g_n \cdot l_n$, где g_n имеет класс C^{r-1}. □

Замечание 2. Часто леммой Адамара называется следствие 1, а не теорема 1.

3.5. Лемма Морса

Теорема 1. *Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное локальное кольцо, $\mathfrak{m} \subset A$ — его максимальный идеал, а $k \coloneqq A/\mathfrak{m}$, причём $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Пусть M — конечно порождённый A-модуль, снабжённый симметрической билинейной формой $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle_A : M \times M \to A$, такой что индуцированная форма $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle_k : \overline{M} \times \overline{M} \to k$, где $\overline{M} \coloneqq M/\mathfrak{m}M$, невырождена. Тогда существует изоморфизм $M \xrightarrow{\sim} A^m$, где $m \coloneqq \dim_k(\overline{M})$, который переводит форму $\langle -, -\rangle_A$ в диагональную форму с элементами $A^\times$ на диагонали.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по m. Если $m = 0$, то $M = 0$ по лемме Накаямы. Теперь рассмотрим случай $m \geqslant 1$. Пусть $\overline{v} \in \overline{M}$ — вектор, такой что $\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle_k \in k^\times$, а $v \in M$ — его поднятие. Тогда $\langle v, v\rangle_A \in A^\times$, откуда, в частности, следует, что отображение $\alpha \mapsto \alpha v : A \to Av$ биективно, так как если $\alpha v = 0$, где $\alpha \in A$, то $\langle \alpha v, v\rangle_A = \alpha\langle v, v\rangle_A = 0$, откуда следует, что $\alpha = 0$. Так как индуцированные билинейные формы на Av и $k\overline{v}$ невырождены, то мы получаем разложения $M = Av \oplus (Av)^{\perp}$ и $\overline{M} = k\overline{v} \oplus (k\overline{v})^{\perp}$, причём отображение редукции $M \to \overline{M}$ переводит $(Av)^{\perp}$ в $(k\overline{v})^{\perp}$ сюръективно, что завершает доказательство по индукции. $\square$

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 кольцо A — это кольцо ростков в точке 0 функций класса C^r, где $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, то форма $\langle -,- \rangle_A$ приводится к диагональному виду с ± 1 на диагонали, причём количества $+1$ и -1 определяются однозначно и задаются сигнатурой формы $\langle -,- \rangle_k$, где $k = A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{R}$.*

Доказательство. Первое утверждение является следствием теоремы 1 и того, что группа $A^{\times}/(A^{\times})^{\cdot 2}$ состоит из двух элементов — классов $\pm 1 \in A^{\times}$. Второе утверждение очевидно. $\square$

Теорема 2 (Лемма Морса). *Пусть f — росток в точке 0 функции класса C^{r+2}, где $r \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$, из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, такой что $f(0) = 0$, $(\partial_i f(0))_{i=1}^n = 0$, а матрица $(\partial_i \partial_j f(0))_{i,j=1}^n$ невырождена. Пусть вещественная квадратичная форма, заданная матрицей $(\partial_i \partial_j f(0))_{i,j=1}^n$, эквивалентна квадратичной форме $\sum_{i=1}^n a_i X_i^2$, где $a_i \in \{\pm 1\}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существует семейство $(u_i)_{i=1}^n$ ростков в точке 0 функций класса C^r из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, таких что $u_i(0) = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, матрица $(\partial_i u_j(0))_{i,j=1}^n$ невырождена, а $f = \sum_{i=1}^n a_i u_i^2$.*

Доказательство. Применив лемму Адамара к f, получаем разложение $f = \sum_{i=1}^n g_i l_i$, где l_i обозначает росток i-ой координатной функции, а g_i для $1 \leqslant i \leqslant n$ — это ростки функций класса C^{r+1}. Прямое вычисление по правилу Лейбница показывает, что для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется равенство $\partial_i f(0) = g_i(0)$. Применив лемму Адамара к функциям g_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, получаем разложение $f = \sum_{i,j=1}^n h_{i,j} l_i l_j$, где $h_{i,j}$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$ — это ростки функций класса C^r. Заменив $h_{i,j}$ на $(h_{i,j} + h_{j,i})/2$ для каждой пары $1 \leqslant i, j \leqslant n$, можно предположить, что $h_{i,j} = h_{j,i}$ для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Прямое вычисление по правилу Лейбница показывает, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполняется равенство $\partial_i \partial_j f(0) = 2 \cdot h_{i,j}(0)$, в частности, матрица $(h_{i,j}(0))_{i,j=1}^n$ невырождена.

Пусть A — это кольцо ростков в точке 0 функций класса C^r из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Тогда по следствию 1 существует матрица $(s_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathrm{GL}_n(A)$ такая что $\sum_{i=1}^n a_i (\sum_{j=1}^n s_{i,j} X_j)^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{i,j} X_i X_j$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ возьмём $u_i := \sum_{j=1}^n s_{i,j} l_j$. Прямое вычисление по правилу Лейбница показывает, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполняется равенство $\partial_i u_j(0) = s_{j,i}(0)$, в частности, матрица $(\partial_i u_j(0))_{i,j=1}^n$ невырождена. $\square$

Глава 4

Неотсортированное

4.1. Категория Лямбда

Определение 1 (Компоненты связности)**.** Слои универсального функтора из данной категории в дискретную категорию называются *компонентами связности*. Компоненты связности топологического пространства определяются аналогично.

Определение 2 (Колчан Кэли)**.** Пусть $\varphi : I \to \mathrm{Sets}$ — представление колчана I отображениями множеств. Тогда мы можем определить *колчан Кэли* или *колчан объектов* представления φ, обозначаемый $\mathrm{Cly}(\varphi)$, объектами которого являются пары (i, x), где $i \in \mathrm{Ob}(I)$, а $x \in \varphi(i)$, а стрелками из (i, x) в (j, y) являются тройки $((i, x), f, (j, y))$, где $f \in \mathrm{Arr}_I(i, j)$, такие что $(\varphi(f))(x) = y$. Колчан Кэли снабжён морфизмом $\pi : \mathrm{Cly}(\varphi) \to I$, $\mathrm{Ar}(\mathrm{Cly}(\varphi)) \ni ((i, x), f, (j, y)) \mapsto f \in \mathrm{Ar}(I)$. Если I — категория, а φ — функтор, то на $\mathrm{Cly}(\varphi)$ существует единственная структура категории, для которой морфизм π является функтором.

Наблюдение 1. Элементы копредела функтора $\varphi : I \to \mathrm{Sets}$, где I — малая категория, можно интерпретировать как компоненты связности $\mathrm{Cly}(\varphi)$, а предела — как сечения структурного функтора $\mathrm{Cly}(\varphi) \to I$.

Замечание 1. Для подмножества группы, реализованного как однообъектный колчан, действующего на группе умножением, конструкция колчана Кэли даёт соответствующий «граф Кэли», а для представлений колчана-стрелки и колчана-петли — традиционные картинки, связанные с морфизмами и эндоморфизмами множеств.

Определение 3 (Орбиты и торсоры группы)**.** Действие группы на множестве называется *транзитивным* или *орбитой*, если у соответствующего группоида Кэли ровно одна компонента связности. Орбиты с тривиальными стабилизаторами точек называются *торсорами*.

Определение 4 (Свободные циклические категории)**.** Категория, порождённая колчаном Кэли стандартной циклической перестановки $x \mapsto x+1$ множества $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, где $n \in \mathbb{N}_1$, обозначается $[n]_\Lambda$ и называется *свободной циклической категорией* порядка n.

Наблюдение 2. Для категорий $[n]$ и $[n]_\Lambda$ число n — это количество стрелок в порождающем колчане. Порождающий колчан свободной категории однозначно восстанавливается по ней.

Обозначение 1 (Полная локализация)**.** Локализация малой категории $\mathcal{C}$ по всем морфизмам обозначается $\mathcal{C}^{\mathrm{grp}}$.

Наблюдение 3. Группа автоморфизмов категории $[n]_\Lambda$ — это циклическая группа порядка n. Группа автоморфизмов соответствующего группоида $[n]_\Lambda^{\mathrm{grp}}$ — это диэдральная группа порядка $2n$.

Замечание 2. Обратите внимание на группы $\mathrm{Aut}([2]_\Lambda^{\mathrm{grp}})$ и $\mathrm{Aut}([1]_\Lambda^{\mathrm{grp}})$!

Определение 5 (Строгость/полнота на эндоморфизмах)**.** Функтор $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ называется *строгим/полным на эндоморфизмах*, если для любого $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ индуцированный гомоморфизм моноидов $\varphi_C : \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C) \to \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\varphi(C))$ инъективен/сюръективен соответственно.

Определение 6 (Категория Лямбда)**.** Категория, объектами которой являются свободные циклические категории $[n]_\Lambda$, где $n \in \mathbb{N}_1$, а морфизмами являются функторы, строгие и полные на эндоморфизмах, обозначается Λ и называется *категорией Лямбда*.

Лемма 1. *Пусть $\varphi : [n]_\Lambda \to [m]_\Lambda$, где $n, m \in \mathbb{N}_1$, — функтор. Тогда индуцированные гомоморфизмы свободных циклических моноидов $\varphi_x : \mathrm{End}_{[n]_\Lambda}(x) \to \mathrm{End}_{[m]_\Lambda}(\varphi(x))$, где $x \in \mathrm{Ob}([n]_\Lambda)$, изоморфны друг другу как объекты категории стрелок категории моноидов.*

Доказательство. Для индуцированного морфизма группоидов $\varphi^{\mathrm{grp}} : [n]_\Lambda^{\mathrm{grp}} \to [m]_\Lambda^{\mathrm{grp}}$ индуцированные гомоморфизмы свободных циклических групп $\varphi_x^{\mathrm{grp}} : \mathrm{End}_{[n]_\Lambda^{\mathrm{grp}}}(x) \to \mathrm{End}_{[m]_\Lambda^{\mathrm{grp}}}(\varphi(x))$, где $x \in \mathrm{Ob}([n]_\Lambda) = \mathrm{Ob}([n]_\Lambda^{\mathrm{grp}})$, изоморфны друг другу как объекты категории стрелок категории моноидов, так как все объекты категории $[n]_\Lambda^{\mathrm{grp}}$ изоморфны друг другу. Теперь заметим, что не изоморфные гомоморфизмы свободных циклических моноидов индуцируют не изоморфные гомоморфизмы свободных циклических групп. □

4.2. Теорема Артина в теории Галуа

Определение 1 (Скрученная групповая алгебра)**.** Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо, а G — группа в мультипликативной записи, действующая на R кольцевыми автоморфизмами в экпоненциальной записи. Определим *скрученную групповую алгебру* $R[G]_\rtimes$ как фактор свободного произведения R и $\mathbb{Z}[G]$ по соотношениям $g\lambda = {}^g\lambda g$, где $g \in G$, $\lambda \in R$.

Замечание 1. Из определения сразу следует, что модуль над скрученной групповой алгеброй $R[G]_\rtimes$ — это R-модуль с полулинейным действием G. Примером является само R с действием G.

Лемма 1. *Пусть E — поле, а G — группа, действующая на E автоморфизмами. Пусть Ω — класс $E[G]_\rtimes$-модулей, у которых все ненулевые подмодули содержат ненулевые G-инвариантные элементы. Тогда $E^{\oplus I} \in \Omega$ для любого конечного множества I.*

Доказательство. Очевидно, что $E \in \Omega$ и Ω замкнуто относительно расширений: подмодуль расширения V с помощью W либо имеет нетривиальное пересечение с W, либо изоморфен подмодулю V. □

Теорема 1 (Теорема Артина)**.** *Пусть E — поле, а G — конечная группа, действующая на E автоморфизмами. Тогда $|E : E^G| \leqslant |G|$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что любое семейство $(a_i)_{i \in I} \in E^{\oplus I}$, где $|G| < |I| < \infty$, линейно зависимо над E^G. Иначе говоря, уравнение $\sum_{i \in I} a_i X_i = 0$ имеет нетривиальный G-инвариантный ноль в $E^{\oplus I}$. Заметим, что такой ноль должен являться нулём системы уравнений $(\sum_{i \in I} {}^g a_i X_i = 0)_{g \in G}$. Множество нулей этой системы G-инвариантно, то есть является $E[G]_\rtimes$-подмодулем $E^{\oplus I}$, причём ненулевым, так как число уравнений строго меньше числа переменных. Применение леммы 1 завершает доказательство. □

4.3. Тождества в алгебрах Ли

Наблюдение 1. Если (4.1, слева) — коммутативная диаграмма модулей над ассоциативным коммутативным унитальным кольцом A, то (4.1, справа) — тоже.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "d"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \otimes_A V \arrow[r, "d'\otimes 1+1\otimes d'"] \arrow[d, "g\otimes g"'] & V \otimes_A V \arrow[d, "g\otimes g"] \\ V \otimes_A V \arrow[r, "d\otimes 1+1\otimes d"] & V \otimes_A V \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Наблюдение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра над ассоциативным коммутативным унитальным кольцом A. Пусть $d : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — дифференцирование $\mathfrak{A}$ над A, а a и b — элементы A. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму (4.2), где mult — это отображение умножения в $\mathfrak{A}$, которая делает очевидной формулу (4.3), где $x, y \in \mathfrak{A}$, а $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \otimes_A \mathfrak{A} \arrow[r, "(d-a)\otimes 1+1\otimes(d-b)"] \arrow[d, "\mathrm{mult}"'] & \mathfrak{A} \otimes_A \mathfrak{A} \arrow[d, "\mathrm{mult}"] \\ \mathfrak{A} \arrow[r, "d-(a+b)"] & \mathfrak{A} \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

$$(d-(a+b))^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ((d-a)^{n-i}(x))((d-b)^i(y)) \tag{4.3}$$

Наблюдение 3. Пусть $A \coloneqq K[X]/(X^p - 1)$, где K — поле характеристики $p \neq 0$, а $x \in A$ — образ $X \in K[X]$. Тогда у нас есть два K-линейных отображения: $x : A \to A$, $f \mapsto xf$ и $\partial/\partial x : A \to A$, $f \mapsto \partial f/\partial x$. Так как $[\partial/\partial x, x] = 1$, то $[x\partial/\partial x, x] = [x, x]\partial/\partial x + x[\partial/\partial x, x] = x$, поэтому x и $x\partial/\partial x$ порождают двумерную разрешимую подалгебру Ли в $\mathrm{End}_{K\text{-mod}}(A)$. Множество $\{x^n \mid 0 \leqslant n < p\} \subset A$ — является собственным базисом для $x\partial/\partial x$ с попарно различными собственными значениями, но в нём нет собственных векторов для $x : A \to A$. Следовательно, у эндоморфизмов x и $x\partial/\partial x$ нет общего собственного вектора.

4.4. Группы и их действия

Наблюдение 1 (Двойные смежные классы)**.** Пусть G — группа, а $K, H \subset G$ — её подгруппы. Рассмотрев действие группы $K \times H^o$ на множестве G двусторонним умножением, получаем разложение G на двойные смежные классы KgH, где $g \in G$, причём каждый KgH является дизъюнктным объединением $|K : K \cap gHg^{-1}|$ элементов G/H, поскольку KgH — это объединение элементов орбиты точки $gH \in G/H$ под действием K на G/H левым умножением, при этом $\mathrm{Stab}_K(gH) = K \cap \mathrm{Stab}_G(gH) = K \cap gHg^{-1}$. В частности, $|KH| = |H||K : K \cap H| = |H||K|/|K \cap H|$, если, скажем, $|K|, |H| < \infty$.

Теорема 1. *Пусть G — группа, а $H, K \subset G$ — её подгруппы. Тогда выполняется неравенство $|G : H \cap K| \leqslant |G : H||G : K|$.*

Доказательство. Стабилизатор точки $(H, K) \in (G/H) \times (G/K)$ относительно очевидного действия G на $(G/H) \times (G/K)$ левым умножением равен $H \cap K$, при этом $|(G/H) \times (G/K)| = |G : H||G : K|$. □

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, а $H \subset G$ — её подгруппа, такая что простые делители порядка H не меньше индекса H. Тогда H нормальна.*

Доказательство. Подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда все орбиты левого действия H на правых смежных классах G по H одноточечные. Теперь воспользуемся тем, что сумма порядков орбит, одна из которых одноточечная, равна индексу H, а порядок каждой орбиты делит порядок H. □

Теорема 3 (Теоремы Силова)**.**

а) *В конечной группе порядка $p^n m$, где m не делится на простое p, существует подгруппа порядка p^n, называемая силовской p-подгруппой.*

б) *Все подгруппы порядка p^k для какого-то k, называемые p-подгруппами, лежат в силовских p-подгруппах, которые все сопряжены.*

с) *Если n_p — количество силовских p-подгрупп, то $n_p \equiv 1 \pmod p$.*

Доказательство.

а) В нашей группе количество подмножеств мощности p^n не делится на p: $(1+x)^{p^n m} \equiv (1+x^{p^n})^m \equiv 1 + mx^{p^n} + \dots \pmod p$. Группа действует умножением на множестве таких подмножеств, причём порядок по крайней мере одной орбиты не делится на p. Стабилизатор точки из этой орбиты имеет порядок p^n.

б) Если мы посмотрим на действие произвольной p-подгруппы на этой орбите, то порядок какой-то из её орбит не будет делится на p, то есть она будет одноточечной.

с) Рассмотрим действие силовской p-подгруппы P сопряжением на множестве силовских p-подгрупп. У неё только одна одноточечная орбита: сама P, так как если P фиксирует другую силовскую p-подгруппу H, то PH — p-подгруппа, строго большая P, что невозможно. □

Лемма 1. *Пусть I — конечное множество, а $\lambda \in \mathbb{Q}$. Тогда у уравнения $\sum_{i\in I} 1/X_i = \lambda$ конечное число нулей в $\mathbb{N}_1^I$.*

Доказательство. Случаи $I = \varnothing$ или $\lambda \leqslant 0$ очевидны. Пусть $I \neq \varnothing$, $\lambda > 0$, а $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}_1^I$ — ноль уравнения. Минимальный из x_i не может быть строго больше $|I|/|\lambda|$. Подстановка целых чисел из интервала $(0, |I|/|\lambda|]$ в уравнение $\sum_{i\in I} 1/X_i = \lambda$ вместо одной из переменных даёт конечное число уравнений того же типа на остальные переменные, и лемма доказывается индукцией по $|I|$. □

Теорема 4 (Теорема Ландау). *Порядок конечной группы с фиксированным числом классов сопряжённости элементов ограничен.*

Доказательство. Порядок группы равен сумме порядков классов сопряжённости, при этом класс сопряжённости единицы одноточечный. Поделив соответствующее уравнение на порядок группы, мы выразим число один в виде суммы обратных к натуральным числам, одно из которых равно порядку группы. Теперь воспользуемся леммой 1. □

4.5. Диагональный аргумент Кантора

Обозначение 1 (Множество подмножеств). Множество подмножеств множества X, иногда называемое *булеаном* X, будем обозначать символом 2^X — так же, как множество отображений из X в $2 = \{0, 1\}$.

Теорема 1 (Диагональный аргумент Кантора). *Пусть X — множество, а $\varphi : X \to 2^X$ — отображение. Тогда φ не сюръективно.*

Доказательство. Пусть $C \coloneqq \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$. Тогда если $c \in X$ и $\varphi(c) = C$, то утверждение «$c \in C$» эквивалентно утверждению «$c \notin C$» — противоречие. □

Замечание 1. В обозначениях формулировки и доказательства теоремы 1 характеристическая функция $X \to \{0,1\}$ подмножества $X \setminus C \subset X$ разлагается в композицию диагонального отображения $X \to X \times X$ и отображения $X \times X \to \{0,1\}$, соответствующего $\varphi : X \to 2^X$, откуда и происходит название «диагональный аргумент Кантора».

Наблюдение 1 (Парадокс Рассела)**.** Предположим, что существует множество всех множеств, которое мы обозначим буквой X. Тогда определены отображения $\iota : 2^X \to X$, $x \mapsto x$ и $\pi : X \to 2^X$, $x \mapsto \{y \in X \mid y \in x\}$, причём $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}$, откуда следует, что π сюръективно, что противоречит диагональному аргументу Кантора.

Наблюдение 2 (Несчётность множества вещественных чисел)**.** По диагональному аргументу Кантора множество вещественных чисел из интервала $[0,1]$, у которых есть троичное разложение, в котором не участвует цифра 1, биективное $2^{\mathbb{N}_1}$ и называемое *множеством Кантора*, несчётно. Как следствие, множество вещественных чисел несчётно.

4.6. Радикал Джекобсона

Определение и эквивалентные характеризации

Определение 1 (Аннулятор модуля)**.** Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо, а M — R-модуль. Ядро структурного гомоморфизма $R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}\text{-mod}}(M)$ называется *аннулятором* M в R и обозначается $\mathrm{Ann}_R(M)$.

Определение 2 (Радикал Джекобсона)**.** Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо. Пересечение аннуляторов простых R-модулей называется *радикалом Джекобсона* кольца R.

Определение 3 (Аннулятор элемента)**.** Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо, M — R-модуль, а $x \in M$ — элемент M. Ядро гомоморфизма $a \mapsto ax : R \to Rx \subset M$ модулей над R называется *аннулятором* x в R и обозначается $\mathrm{Ann}_R(x)$.

Теорема 1 (Характеризации радикала Джекобсона). *Пусть $\mathfrak{J}$ — радикал Джекобсона ассоциативного унитального кольца R. Тогда $\mathfrak{J}$ можно охарактеризовать следующими эквивалентными способами:*

а) *$\mathfrak{J}$ совпадает с пересечением всех максимальных левых идеалов R;*

б) *$\mathfrak{J}$ совпадает с множеством всех $x \in R$, таких что для любого $a \in R$ элемент $1 - ax \in R$ обратим слева;*

с) *$\mathfrak{J}$ совпадает с множеством всех $x \in R$, таких что для любого $a \in R$ элемент $1 - ax \in R$ двусторонне обратим;*

д) *$\mathfrak{J}$ совпадает с множеством всех $x \in R$, таких что для любых $a, b \in R$ элемент $1 - axb \in R$ двусторонне обратим;*

е) *$\mathfrak{J}$ как множество совпадает с радикалом Джекобсона кольца R^o.*

Доказательство.

а) Пересечение аннуляторов простых R-модулей совпадает с пересечением аннуляторов ненулевых элементов простых R-модулей, а это в точности максимальные левые идеалы R.

б) Пусть $x \in R$. Тогда условие «$x \notin \mathfrak{J}$» эквивалентно условию «существует максимальный левый идеал $\mathfrak{m} \subset R$, такой что $x \notin \mathfrak{m}$», которое эквивалентно условию «существует максимальный левый идеал $\mathfrak{m} \subset R$, такой что образ x в $R/\mathfrak{m}$ не равен нулю», которое эквивалентно условию «существует максимальный левый идеал $\mathfrak{m} \subset R$, такой что существует $a \in R$, такой что $ax \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$», которое эквивалентно отрицанию условия из пункта (б).

с) Условие из пункта (с), очевидно, сильнее условия из пункта (б). Докажем обратное. Пусть $x \in \mathfrak{J}$. Левые обратные к элементам множества $1 + Rx \subset R$ фиксируют класс $1 + Rx \in R/(Rx)$, а потому и сами ему принадлежат, а потому обратимы слева. Отсюда следует, что элементы множества $1 + Rx$ двусторонне обратимы.

д) С одной стороны, условие из пункта (д), очевидно, сильнее условия из пункта (с), так как можно взять $b = 1$. С другой стороны, $\mathfrak{J}$ является двусторонним идеалом, поэтому если $x \in \mathfrak{J}$, то $xb \in \mathfrak{J}$ для любого $b \in R$, откуда следует условие из пункта (д).

е) Пункт (е) является прямым следствием характеризации (д). $\square$

Лемма Накаямы

Общая формулировка и доказательство

Теорема 2 (Лемма Накаямы)**.** *Пусть M — ненулевой конечно порождённый модуль над ассоциативным унитальным кольцом R, а $\mathfrak{J}$ — радикал Джекобсона кольца R. Тогда $\mathfrak{J}M \neq M$.*

Доказательство. У M есть ненулевой циклический фактор-модуль, например, фактор M по подмодулю, порождённому максимальным собственным подмножеством минимального порождающего M множества, а у ненулевого циклического фактор-модуля есть простой фактор-модуль, который зануляется радикалом Джекобсона. □

Лемма Накаямы для коммутативных колец

Теорема 3. *Пусть M — конечно порождённый модуль над ассоциативным коммутативным унитальным кольцом A, а $\mathfrak{a}$ — идеал в A, такой что $\mathfrak{a}M = M$. Тогда существует $x \in 1 + \mathfrak{a}$, такой что $xM = 0$.*

Доказательство. Пусть $S \coloneqq 1 + \mathfrak{a} \subset A$. Так как идеал $\mathfrak{a}_S \coloneqq \mathfrak{a}A_S \subset A_S$ содержится в радикале Джекобсона кольца A_S, и выполняется равенство $\mathfrak{a}_S M_S = M_S$, то $M_S = 0$, что в предположении конечной порождённости M эквивалентно существованию $x \in S$, такого что $xM = 0$. □

Замечание 1. Если в условиях теоремы 3 взять в качестве $\mathfrak{a}$ радикал Джекобсона кольца A, то элемент x будет обратимым, и из равенства $xM = 0$ будет следовать равенство $M = 0$. Таким образом, теорему 3 можно воспринимать как эквивалентную переформулировку леммы Накаямы для коммутативных колец.

Следствие 1. *Пусть M — конечно порождённый модуль над ассоциативным коммутативным унитальным кольцом A. Тогда любой сюръективный A-эндоморфизм $\varphi : M \to M$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Эндоморфизм φ задаёт на M структуру $A[X]$-модуля, такого что $XM = M$. Тогда, по теореме 3, существует $P(X) \in A[X]$, такой что $(1 - P(X)X)M = 0$, то есть $\mathrm{Id}_M = P(\varphi) \circ \varphi = \varphi \circ P(\varphi)$. □

Следствие 2. *Пусть A — ненулевое коммутативное ассоциативное унитальное кольцо, а $m, n \in \mathbb{N}_0$. Тогда если A-модули A^m и A^n изоморфны, то $m = n$.*

Радикал Джекобсона и полупростота

Теорема 4 (Критерий полупростоты артинового модуля). *Если M — артинов модуль над ассоциативным унитальным кольцом R, то M полупрост тогда и только тогда, когда пересечение максимальных собственных подмодулей M нулевое.*

Доказательство. Пусть J — это пересечение максимальных собственных подмодулей M.

Сначала предположим, что M полупрост. Если $J \neq 0$, то существует простой подмодуль $P \subset J$. Дополнение к P в M является максимальным собственным подмодулем в M, но при этом не содержит P — противоречие.

Теперь предположим, что $J = 0$. Пусть $P \subset M$ — простой подмодуль. Так как $J = 0$, то существует максимальный собственный подмодуль $N \subset M$, такой что $P \not\subset N$. Тогда $P \cap N = 0$ по минимальности P и $P + N = M$ по максимальности N.

Осталось доказать, что если у простых подмодулей M есть дополнения, то M полупрост. Пусть $L \subset M$ — это минимальный среди дополнений к полупростым подмодулям M. Если $L \neq 0$, то в L есть простой подмодуль, у которого есть дополнение в M, а следовательно, и в L, что даёт противоречие с определением L. □

Наблюдение 1. Для полупростого модуля над ассоциативным унитальным кольцом артиновость эквивалентна нётеровости, которая эквивалентна конечной порождённости.

Следствие 3 (Критерий полупростоты кольца). *Ассоциативное унитальное кольцо полупросто тогда и только тогда, когда оно артиново слева и его радикал Джекобсона равен нулю.*

Доказательство. Заметим, что полупростое кольцо автоматически артиново слева по наблюдению 1, так как оно является циклическим модулем над собой, после чего воспользуемся теоремой 4. □

Радикал Джекобсона и артиновы кольца

Нётеровость слева артиновых слева колец

Определение 4 (Аннулятор идеала). Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо, $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал в R, а M — R-модуль. Тогда *аннулятором* $\mathfrak{a}$ в M, обозначаемым $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})$, называется R-подмодуль $\{m \in M \mid am = 0$ для всех $a \in \mathfrak{a}\}$ модуля M.

Лемма 1. *Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо, $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал в R, $\mathfrak{J}$ — радикал Джекобсона R, а M — артинов R-модуль. Тогда если $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}) \subsetneq M$, то $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}) \subsetneq \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}\mathfrak{J})$.*

Доказательство. Пусть $N \subset M$ — минимальный подмодуль M, строго содержащий $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})$. Тогда $\mathfrak{J}N \subset \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})$, то есть $\mathfrak{a}\mathfrak{J}N = 0$, так как $N/\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})$ — простой R-модуль. □

Лемма 2. *Пусть R — ассоциативное унитальное артиново слева кольцо, а $\mathfrak{J}$ — радикал Джекобсона R. Тогда $\mathfrak{J}$ нильпотентен, то есть $\mathfrak{J}^n = 0$ для какого-то $n \in \mathbb{N}_1$.*

Доказательство. Так как R артиново слева, то ряд $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}^2 \supset \mathfrak{J}^3 \supset \cdots$ стабилизируется на некотором $\mathfrak{J}^n$, где $n \in \mathbb{N}_1$. По лемме 1 идеал $\mathfrak{J}^n$ зануляет все артиновы R-модули, в частности, само R, откуда следует, что $\mathfrak{J}^n = 0$. □

Теорема 5 (Нётеровость слева артиновых слева колец)**.** *Пусть R — ассоциативное унитальное артиново слева кольцо. Тогда R нётерово слева.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{J} \subset R$ — радикал Джекобсона R. По лемме 2 существует $n \in \mathbb{N}_1$, такое что $\mathfrak{J}^n = 0$. Присоединённые факторы фильтрации $R = \mathfrak{J}^0 \supset \mathfrak{J}^1 \supset \mathfrak{J}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{J}^n = 0$ являются артиновыми модулями над полупростым кольцом $R/\mathfrak{J}$, следовательно, они нётеровы, следовательно, R нётерово слева. □

Характеризация коммутативных артиновых колец

Лемма 3. *В ассоциативном коммутативном унитальном артиновом кольце конечное число максимальных идеалов.*

Доказательство. В противном случае в множестве идеалов, являющихся конечными пересечениями максимальных, не было бы минимального элемента, так как отображение, сопоставляющее конечному подмножеству множества максимальных идеалов пересечение его элементов, инъективно по китайской теореме об остатках. □

Теорема 6. *Ассоциативное коммутативное унитальное кольцо артиново тогда и только тогда, когда оно нётерово и нульмерно по Круллю.*

Доказательство. Пусть A — ассоциативное коммутативное унитальное артиново кольцо, $\mathfrak{J}$ — радикал Джекобсона A, а $\mathcal{M}$ — множество максимальных идеалов A. Согласно леммам 2 и 3 и тому, что степени взаимно простых идеалов взаимно просты, мы получаем, что $\mathfrak{J}^n = \prod_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} \mathfrak{m}^n = 0$ для некоего $n \in \mathbb{N}_1$, и канонический гомоморфизм $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} A/\mathfrak{m}^n$ является изоморфизмом. Для любого $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ в кольце $A/\mathfrak{m}^n$ один простой идеал — образ $\mathfrak{m}$. Факторы конечной фильтрации A-модуля $A/\mathfrak{m}^n$ образами степеней $\mathfrak{m}$ — это векторные пространства над полем $A/\mathfrak{m}$, для которых артиновость совпадает с нётеровостью. Учитывая, что артиновость и нётеровость стабильны относительно перехода к расширениями, подмодулям и фактормодулям, мы получаем, что артиновы кольца нульмерны и нётеровы.

Обратное тоже верно: в нётеровом кольце нильрадикал нильпотентен и является конечным пересечением простых идеалов в соответствии с разложеним на неприводимые компоненты, что позволяет применить то же рассуждение. □

4.7. Теорема Крулля-Шмидта для модулей

Наблюдение 1. Пусть ψ — эндоморфизм абелевой группы V. Тогда утверждение $\ker(\psi) \cap \operatorname{im}(\psi) = 0$ эквивалентно утверждению $\ker(\psi) = \ker(\psi^{\circ 2})$, а утверждение $\ker(\psi) + \operatorname{im}(\psi) = V$ эквивалентно утверждению $\operatorname{im}(\psi) = \operatorname{im}(\psi^{\circ 2})$.

Лемма 1 (Лемма Фиттинга)**.** *Пусть M — нётеров и артинов модуль над ассоциативным унитальным кольцом R, а $\varphi \in \operatorname{End}_{R\text{-mod}}(M)$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}_1$, такое что $M = \ker(\varphi^{\circ n}) \oplus \operatorname{im}(\varphi^{\circ n})$. В частности, если модуль M неразложим, то эндоморфизм φ либо является изоморфизмом, либо нильпотентен.*

Доказательство. Заметим, что так как модуль M нётеров и артинов, то ряды $\ker(\varphi) \subset \ker(\varphi^{\circ 2}) \subset \cdots$ и $\operatorname{im}(\varphi) \supset \operatorname{im}(\varphi^{\circ 2}) \supset \cdots$ стабилизируются, после чего применим наблюдение 1. □

Лемма 2. *Если все элементы ассоциативного унитального кольца R, которые не являются двусторонне обратимыми, являются нильпотентными, то они все лежат в радикале Джекобсона R. В частности, в этом случае суммы нильпотентов из R нильпотентны.*

Доказательство. Пусть $x \in R$ — нильпотент, а $a \in R$ — произвольный элемент. Так как x не обратим слева, то ax — тоже, откуда следует, что ax — нильпотент, откуда следует, что $1 - ax$ двусторонне обратим. □

Теорема 1 (ТЕОРЕМА КРУЛЛЯ-ШМИДТА). *Пусть M — нётеров и артинов модуль над ассоциативным унитальным кольцом R, а $(V_i)_{i\in I}$ и $(U_j)_{j\in J}$ — два конечных семейства неразложимых подмодулей модуля M, такие что $M = \bigoplus_{i\in I} V_i = \bigoplus_{j\in J} U_j$. Тогда для любого $e \in I$ существует $r \in J$, такой что $M = V_e \oplus (\bigoplus_{j\in J\setminus\{r\}} U_j) = U_r \oplus (\bigoplus_{i\in I\setminus\{e\}} V_i)$.*

Доказательство. Для любых $e \in I$ и $r \in J$ через $\rho_{r,e} : V_e \to U_r$ обозначим отображение, проецирующее V_e в U_r вдоль $\bigoplus_{j\in J\setminus\{r\}} U_j$, а через $\pi_{e,r} : U_r \to V_e$ — отображение, проецирующее U_r в V_e вдоль $\bigoplus_{i\in I\setminus\{e\}} V_i$. Для произвольного $e \in I$ выполняется равенство $\mathrm{Id}_{V_e} = \sum_{j\in J} \pi_{e,j} \circ \rho_{j,e}$, из которого, согласно леммам 1 и 2, следует, что для какого-то $r \in J$ эндоморфизм $\pi_{e,r} \circ \rho_{r,e}$ является изоморфизмом, откуда, с учётом неразложимости U_r, следует, что отображения $\rho_{r,e}$ и $\pi_{e,r}$ являются изоморфизмами, а это утверждение эквивалентно утверждению, которое требуется доказать. □

Замечание 1. Помимо Вольфганга Крулля (1899–1971) и Отто Шмидта (1891–1956) в формулировке и доказательстве теоремы Крулля-Шмидта и её вариантов участвовали много математиков, в частности, Джозеф Веддербарн (1882–1948) и Роберт Ремак (1888–1942).

4.8. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса

Определение 1 (МОДУЛИ КЛАССОВ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ И ГРАНИЦ). Пусть $\cdots \subset C_{-1,\bullet} \subset C_{0,\bullet} \subset C_{1,\bullet} \subset C_{2,\bullet} \subset \cdots$ — ряд комплексов с дифференциалами $C_{i,q} \xrightarrow{\partial} C_{i,q-1}$. Обозначим образы $C_{i,q} \cap \partial^{-1}(C_{i-r,q-1})$ и $C_{i,q} \cap \partial(C_{i+r-1,q+1})$ в $C_{i,q}/C_{i-1,q}$ через $Z^r_{i,q-i}$ и $B^r_{i,q-i}$ соответствено.

Наблюдение 1. В обозначениях определения 1 дифференциалы ∂ индуцируют гомоморфизмы $\widetilde{d}^r_{i,q-i} : Z^r_{i,q-i} \to Z^r_{i-r,q+r-i-1}/B^r_{i-r,q+r-i-1}$ с ядром $Z^{r+1}_{i,q-i}$ и образом $B^{r+1}_{i-r,q+r-i-1}/B^r_{i-r,q+r-i-1}$.

Определение 2 (Спектральная последовательность фильтрованного комплекса)**.** В обозначениях определения 1 семейство троек $(E^r_{i,q-i}, d^r_{i,q-i}, \rho^r_{i,q-i})$, где $E^r_{i,q-i} \coloneqq Z^r_{i,q-i}/B^r_{i,q-i}$, $d^r_{i,q-i} : E^r_{i,q-i} \to E^r_{i-r,q+r-i-1}$ индуцировано $\widetilde{d}^r_{i,q-i}$ из наблюдения 1, а $\rho^r_{i,q-i}$ — это очевидный изоморфизм $\ker(d^r_{i,q-i})/\operatorname{im}(d^r_{i+r,q-r-i+1}) \xrightarrow{\sim} E^{r+1}_{i,q-i}$, называется *спектральной последовательностью фильтрованного комплекса* $\operatorname{colim}_{i\in\mathbb{Z}}(C_{i,\bullet})$.

Глава 5

Совсем сырые и/или мелкие тексты

5.1. Топология Гротендика

Общее определение

Определение 1 (Замкнутая слева/справа подкатегория)**.** Подкатегория $\mathcal{C}$ категории $\mathcal{E}$ называется *замкнутой слева*, если она содержит все морфизмы из $\mathcal{E}$, кообласти которых лежат в $\mathcal{C}$, и *замкнутой справа*, если $\mathcal{C}^o$ замкнута слева в $\mathcal{E}^o$.

Наблюдение 1. Замкнутая слева или справа подкатегория всегда является полной подкатегорией.

Наблюдение 2. Прообраз замкнутой слева/справа подкатегории является замкнутой слева/справа подкатегорией.

Определение 2 (Сито/решето)**.** *Ситом* или *решетом* на объекте данной категории называется замкнутая слева подкатегория категории объектов над ним.

Определение 3 (Главное сито)**.** Сито всех объектов над данным объектом называется *главным ситом* на нём.

Определение 4 (Ограничение сита)**.** Любой морфизм определяет функтор из категории объектов над своей областью в категорию объектов над своей кообластью. Соответствующий функтор прообраза для сит называется *функтором ограничения* вдоль данного морфизма.

Определение 5 (Топология Гротендика)**.** *Топология Гротендика* на данной категории задаётся классом сит на её объектах, называемых *покрывающими ситами*, удовлетворяющим следующим свойствам:

a) Главные сита являются покрывающими;

б) Ограничения покрывающих сит являются покрывающими;

c) Если ограничения сита вдоль всех объектов какого-то покрывающего сита являются покрывающими, то оно само является покрывающим.

Определение 6 (Пучок)**.** Каждое сито на объекте данной категории снабжено тавтологическим коаугментированным функтором в эту категорию. Предпучок на категории с топологией Гротендика называется *пучком*, если он переводит коаугментированые функторы, соответствующие покрывающим ситам, в диаграммы пределов.

Замечание 1. Коаугментация функтора — это ко-конус над функтором, то есть его естественное преобразование в какой-то постоянный функтор.

Случай топологического пространства

Определение 7 (Сито и пучок на топологическом пространстве)**.** Назовём *ситом* на топологическом пространстве замкнутую слева подкатегорию категории его открытых подмножеств, а *пучком* — предпучок, сохраняющий пределы сит.

Наблюдение 3. Пусть $\mathcal{S}$ — подмножество множества $\mathrm{Open}(T)$, где T — топологическое пространство. Тогда полная подкатегория категории $\mathrm{Open}(T)$, заданная множеством объектов $\{U \cap V \subset T \mid U, V \in \mathcal{S}\}$, является кофинальной в сите, порождённом $\mathcal{S}$.

5.2. Группа в категории

Определение 1 (Группа в категории)**.**

а) Пусть $\mathcal{C}$ — категория. На объекте $G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ введена структура группы в категории $\mathcal{C}$, если для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ на множестве $\mathrm{Mor}(X, G)$ введена структура группы, причём для любого морфизма $\varphi : Y \to X$ из $\mathcal{C}$ индуцированное отображение $\varphi^* : \mathrm{Mor}(X, G) \to \mathrm{Mor}(Y, G)$ является гомоморфизмом групп.

б) Пусть G и H — две группы в категории $\mathcal{C}$. Морфизм $\psi : G \to H$ из $\mathcal{C}$ называется морфизмом групп в категории, если для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ индуцированное отображение $\psi_* : \mathrm{Mor}(X, G) \to \mathrm{Mor}(X, H)$ является гомоморфизмом групп.

5.3. Лемма о трубке

Наблюдение 1 (Лемма о трубке). Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство множеств, $\prod_{i\in I} Y_i$ — подпроизведение в $\prod_{i\in I} X_i$, а $(\prod_{i\in I} U_{i,\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ — семейство подпроизведений в $\prod_{i\in I} X_i$, покрывающее $\prod_{i\in I} Y_i$. Для каждого $i \in I$ определим множество $V_i \coloneqq \bigcup_{y_i\in Y_i} \bigcap_{\{\alpha\in\Omega | y_i \in U_{i,\alpha}\}} U_{i,\alpha} \subset X_i$. Тогда выполняются вложения $\prod_{i\in I} Y_i \subset \prod_{i\in I} V_i \subset \bigcup_{\alpha\in\Omega}(\prod_{i\in I} U_{i,\alpha})$.

Лемма 1. *Пусть $K \subset X$ и $K' \subset X'$ — компактные подмножества топологических пространств X и X', а $O \subset X \times X'$ открытая окрестность множества $K \times K'$. Тогда существуют открытые окрестности $K \subset U \subset X$ и $K' \subset U' \subset X'$, такие что $K \times K' \subset U \times U' \subset O$.*

Доказательство. Представим O как объединение семейства базовых открытых множеств произведения, выберем из этого семейства конечное подпокрытие компактного множества $K \times K'$ и применим к нему наблюдение 1. □

Следствие 1. *Если K и K' — дизъюнктные компактные подмножества хаусдорфова топологического пространства X, то у них есть дизъюнктные открытые окрестности.*

Доказательство. Пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута. Применим лемму 1 к множеству $K \times K'$ с открытой окрестностью $(X \times X) \setminus \Delta$. □

5.4. Мелочи

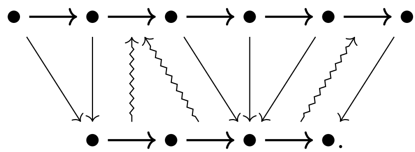
Наблюдение 1 (Предупорядочения и упорядочения)**.** Если рассматривать предупорядоченные множества как категории, то это в точности категории, эквивалентные частично упорядоченным множествам.

Наблюдение 2 (Решётка разбиений)**.** Разбиения данного множества образуют полную решётку, так же, как и подмножества.

Соглашение 1 (Кольцоиды)**.** Категории, обогащённые структурой абелевой группы/моноида на Hom-ах, стоит называть *кольцоидами/полукольцоидами*, а не аддитивными/преаддитивными категориями.

Определение 1 (p-адическая норма)**.** Пусть $p \in \mathbb{Z}$ — простое число. Норма $x \mapsto \|x\|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, такая что $\|p\|_p = p^{-1}$ и $\|l\|_p = 1$ для любого простого $l \in \mathbb{Z}$, отличного от p, называется *p-адической нормой.*

Наблюдение 3. Дуальность Жуаяля можно иллюстрировать так:



Утверждение 1. *Пересечение «положительных» открытых полупространств, соответствующих произвольному базису в евклидовом пространстве, непусто.*

Доказательство. По определению структурная билинейная форма евклидова пространства невырождена, поэтому любая линейная функция представляется каким-то вектором. Возьмём вектор, представляющий линейную функцию, равную 1 на каждом из векторов базиса. □

Наблюдение 4. Разложение конечномерной полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль в прямую сумму простых идеалов очень каноническое.

Факт 1. Гаусс обнаружил следующую формулу для $16\cos(2\pi/17)$:

$$\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Наблюдение 5. Выполняется следующая важная формула для элементарных трансвекций, где $ab = ba = -1$:

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}.$$

Наблюдение 6. Вроде как, конструкция внешнего автоморфизма S_6 с помощью группы Матье M_{12}, реализованной как точно 5-транзитивная группа всех автоморфизмов системы Штейнера типа $(5, 6, 12)$, напрямую связана с элементарной конструкцией этого автоморфизма с помощью шести особых пятёрок разбиений на пары шестиэлементного множества.

Наблюдение 7 (Тождества Ньютона-Жирара)**.** Зная, что логарифмическая производная геометрической прогрессии равна её самой, получаем:

$$-t\frac{d}{dt}\log\prod_{\lambda\in\Lambda}(1-\lambda t) = \frac{-t\frac{d}{dt}\prod_{\lambda\in\Lambda}(1-\lambda t)}{\prod_{\lambda\in\Lambda}(1-\lambda t)} = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{n\geqslant 1}\lambda^n t^n \implies$$

$$\implies -k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}\gamma_i\sigma_{k-i}, \text{ где } \prod_{\lambda\in\Lambda}(1-\lambda t) = \sum_{n\geqslant 0}\sigma_n t^n,\ \gamma_n := \sum_{\lambda\in\Lambda}\lambda^n.$$

Обозначение 1. В обозначениях $N \rtimes H$ и $N \leftthreetimes H$ активная группа тычет вилками в пассивную.

Наблюдение 8. Закон инерции Сильвестра абсолютно тривиален: у положительного и отрицательного подпространства тривиальное пересечение, поэтому сумма их размерностей меньше или равна размерности всего пространства.

Наблюдение 9. Евклидово самосопряжённый оператор расширением скаляров даёт положительно эрмитово самосопряжённый оператор, а у таких операторов все собственные числа вещественные. Для самосопряжённого оператора ортогонал к инвариантному подпространству инвариантен. Эти два утверждения дают ортогональную диагонализацию квадратичных форм на евклидовых пространствах.

Соглашение 2. Для квадратичных форм, возможно, стоит говорить «положительная», «отрицательная», «полуположительная», «полуотрицательная». Вместо «знакоопределённая» говорить «анизотропная».

Наблюдение 10. Модуль над конечным прямым произведением колец является прямой суммой образов действий координатных единиц.

Наблюдение 11. Определены диагональ $\Delta : X \to X \times X$ и кодиагональ $\nabla : X \sqcup X \to X$. Приведённое произведение двух морфизмов $f : Z \to X$ и $g : Z \to Y$ выражается так: $(f \times g) \circ \Delta : Z \to Z \times Z \to X \times Y$. Приведённое копроизведение двух морфизмов $f : X \to Z$ и $g : Y \to Z$ выражается так: $\nabla \circ (f \sqcup g) : X \sqcup Y \to Z \sqcup Z \to Z$.

Наблюдение 12 (Фробениус абелевой группы). Пусть $p \in \mathbb{Z}$ — простое число, а V — абелева группа. Тогда мы имеем гомоморфизм абелевых групп $a \mapsto [a^{\otimes [p]_\Lambda}] : V \to \operatorname{coker}(\sum_{C_p} : (V^{\otimes [p]_\Lambda})_{C_p} \to (V^{\otimes [p]_\Lambda})^{C_p})$, где $C_p \coloneqq \operatorname{Aut}([p]_\Lambda)$, а $\sum_{C_p}$ — отображение суммирования по действию конечной группы C_p из её коинвариантов в инварианты.

Наблюдение 13 (Функториальность жорданова разложения). Пусть K — поле, а $\varphi : V \to W$ — гомоморфизм $K[X]$-модулей. Тогда φ отображает жорданово подпространство $\bigcup_{n \geqslant 0} \ker((X - \lambda)^n) \subset V$, где $\lambda \in K$, в жорданово подпространство $\bigcup_{n \geqslant 0} \ker((X - \lambda)^n) \subset W$.

Пример 1. Алгебра $k[X, Y]/(XY)$, где k — ассоциативное коммутативное унитальное кольцо, не является амальгамированной суммой в категории ассоциативных коммутативных унитальных колец своих подалгебр $k[X]$ и $k[Y]$ над их пересечением $k[X] \cap k[Y] = k$. Этот пример был подсказан Дмитрием Калединым: `https://lj.rossia.org/users/tiphareth/2525684.html?thread=186738164#t186738164`.

Утверждение 2. *Пусть $\alpha : S^{-1}R \rightleftarrows T^{-1}E : \beta$ — кольцевые гомоморфизмы между локализациями ассоциативных унитальных колец R и E по множествам S и T. Если $\beta \circ \alpha : S^{-1}R \to S^{-1}R$ является эндоморфизмом над R, а образ α содержит образ канонического гомоморфизма $E \to T^{-1}E$, то $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}$ и $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}$.*

Доказательство. Так как все эндоморфизмы $S^{-1}R$ над R тождественные, то $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}$. Так как $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}$, то $\alpha \circ \beta$ переводит образ α в себя тождественно, в частности, является эндоморфизмом над E, откуда следует, что $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}$. □

Наблюдение 14. Частично упорядоченное множество счётных подмножеств несчётного множества удовлетворяет условию наличия верхних граней у счётных цепей, но не содержит максимальных элементов.

Теорема 1 (Основная теорема арифметики)**.** *Любой ненулевой главный идеал области главных идеалов однозначно представляется в виде конечного произведения ненулевых простых главных идеалов.*

Определение 2 (Консервативный функтор)**.** Функтор называется *консервативным*, если он переводит морфизмы, не являющиеся изоморфизмами, в морфизмы, не являющиеся изоморфизмами.

Обозначение 2 (Мультипликативный моноид кольца)**.** Пусть R — ассоциативное унитальное кольцо. Моноид всех элементов R с операцией умножения обозначается через R^{mult}.

Определение 3 (Характер Дирихле)**.** Отображение $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ называется *характером Дирихле* модуля m, где $m \in \mathbb{N}_1$, если оно разлагается в композицию стандартной редукции $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ и консервативного гомоморфизма мультипликативных моноидов $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathrm{mult}} \to \mathbb{C}^{\mathrm{mult}}$.

Наблюдение 15 (Лист Мёбиуса)**.** Определим *раздутие* $\mathbb{R}^n$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}_1$, как множество $\mathcal{M}^n := \{(x, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^n) \mid x \in l\}$ с индуцированной топологией, где $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^n)$ — это грассманиан прямых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через $0 \in \mathbb{R}^n$. Отображение $\pi : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, l) \mapsto x$ задаёт гомеоморфизм между дополнением *особого слоя* $\pi^{-1}(0)$ в $\mathcal{M}^n$ и $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Инверсия относительно единичной сферы на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ однозначно продолжается до гомеоморфизма $\mathcal{M}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{RP}^n \setminus \{0\}$. Проколотое проективное пространство $\mathbb{RP}^n \setminus \{0\}$, в свою очередь, гомеоморфно пространству аффинных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ по проективной двойственности. Топологическое пространство $\mathcal{M}^2$ называется *листом Мёбиуса*.

Замечание 1. Процедура, обратная раздутию, называется *сдуванием*.

Соглашение 3 (Аксиоматическая алгебра)**.** Возможно, стоит называть алгебру, которую сейчас, в первой четверти XXI века, преподают на первых курсах университетов, *аксиоматической алгеброй*.

Определение 4 (Внешние степени спаривания)**.** Пусть I — конечное множество, A — коммутативное ассоциативное унитальное кольцо, $v \otimes w \mapsto v \cdot w : V \otimes_A W \to A$ — спаривание между двумя A-модулями. Спаривание $\Lambda^I(V) \otimes_A \Lambda^I(W) \to A$, индуцированное спариванием $(\bigotimes_{i \in I} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in I} w_i) \mapsto \det((v_i \cdot w_j)_{i,j \in I}) : V^{\otimes I} \otimes_A W^{\otimes I} \to A$, называется *$I$-ой внешней степенью* спаривания $v \otimes w \mapsto v \cdot w : V \otimes_A W \to A$.

Определение 5 (Дискриминант билинейной формы)**.** В условиях определения 4 при дополнительном предположении $V = W \simeq A^I$ спаривание $(\bigwedge_{i\in I} v_i) \otimes (\bigwedge_{i\in I} w_i) \mapsto \det((v_i \cdot w_j)_{i,j\in I}) : \Lambda^I(V) \otimes_A \Lambda^I(V) \to A$ называется *дискриминантом* спаривания $v \otimes w \mapsto v \cdot w : V \otimes_A V \to A$.

Наблюдение 16 (Метр)**.** Один метр — это примерно одна десятимиллионная расстояния между Северным полюсом и экватором по поверхности Земли, если бы Земля была бы шаром. Десять — это количество пальцев на обеих руках человека, а семь нулей в числе 10^7 нужны для того, чтобы метр был максимально близок к росту человека.

Наблюдение 17 (Два определения экспоненты)**.** Доказательства сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ и равенства $\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{x}{m})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ довольно простые.

Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ получается банальным сравнением с геометрической прогрессией, так как при ограниченном x число $|\frac{1}{n!}x^n|/|\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}| = \frac{1}{n}|x|$ стремится к 0 когда n стремится к ∞.

По биному Ньютона $(1 + \frac{x}{m})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{m^n} \frac{1}{n!} x^n$. Коэффициенты этих рядов по модулю не больше соответствующих коэффициентов абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ и стремятся к ним когда m стремится к ∞, откуда и следует, что $\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{x}{m})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.