# Тензорное произведение

Y. Y.

24.02.2023

## Содержание

***Соглашения и обозначения*** **1**

**1 Бинарное тензорное произведение** **2**
1.1 Определение . . . . . 2
1.2 Сопряжённость и унитальность . . . . . 2
1.3 Функторы замены кольца . . . . . 3

**2 I-арное тензорное произведение без коэффициентов** **3**
2.1 Определение . . . . . 3
2.2 Дистрибутивность и ассоциативность . . . . . 4
2.3 Тензорное произведение колец . . . . . 4
2.4 Обобщённая точность справа . . . . . 5

**3 I-арное тензорное произведение с коэффициентами** **5**
3.1 Определение . . . . . 5
3.2 Ассоциативность . . . . . 6

## *Соглашения и обозначения*

Действия и модули считаются левыми. Правый модуль — это модуль над противоположным кольцом, правое действие — это антидействие. Соотвественно, левый модуль обладает индуцированной структурой правого модуля над противоположным кольцом, и наоборот. Если $R$ — кольцо, то $R^o$ — противоположное кольцо.

# 1. Бинарное тензорное произведение

## 1.1. Определение

**Определение 1** (Бинарное тензорное произведение)**.** Пусть $R$ — ассоциативное унитальное кольцо, $M_R$ — правый $R$-модуль, ${}_RN$ — левый $R$-модуль. *Тензорное произведение* $M_R$ и ${}_RN$ над $R$, обозначаемое $M_R \otimes_R {}_RN$, — это абелева группа, заданная образующими — формальными произведениями $m \otimes n$, где $m \in M_R$, $n \in {}_RN$, — и соотношениями — $(m' + m'') \otimes n = m' \otimes n + m'' \otimes n$, $m \otimes (n' + n'') = m \otimes n' + m \otimes n''$, $(mr) \otimes n = m \otimes (rn)$, где $m, m', m'' \in M_R$, $n, n', n'' \in {}_RN$, $r \in R$.

**Определение 2** (Функториальность)**.** Пусть $S$, $R$ и $T$ — ассоциативные унитальные кольца. Пусть $f : M_R \to M'_R$ — гомоморфизм правых $R$-модулей, а $g : {}_RN \to {}_RN'$ — гомоморфизм левых $R$-модулей. Тогда эта пара гомоморфизмов индуцирует гомоморфизм $f \otimes g : M_R \otimes_R {}_RN \to M'_R \otimes_R {}_RN'$, $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$, называемый *тензорным произведением* гомоморфизмов $f$ и $g$. В частности, если $M_R = {}_SM_R$ является $(S, R)$-бимодулем, а ${}_RN = {}_RN_T$ является $(R, T)$-бимодулем, то на ${}_SM_R \otimes_R {}_RN_T$ индуцируется структура $(S, T)$-бимодуля.

## 1.2. Сопряжённость и унитальность

**Утверждение 1** (Сопряжённость с Hom)**.** *Пусть $S$, $R$ и $T$ — ассоциативные унитальные кольца, ${}_SM_R$ — $(S, R)$-бимодуль, ${}_RV$ — левый $R$-модуль, ${}_SW$ — левый $S$-модуль. Тогда имеем следущую биекцию:*

$$\mathrm{Hom}_R({}_RV, \mathrm{Hom}_S({}_SM_R, {}_SW)) \underset{((g(m\otimes v)\leftarrow\!\shortmid m)\leftarrow\!\shortmid v)\leftarrow\!\shortmid g}{\overset{f\mapsto(m\otimes v\mapsto(f(v))(m))}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_S({}_SM_R \otimes_{R} {}_RV, {}_SW).$$

*Эта биекция естественна. Если ${}_RV = {}_RV_T$ является $(R, T)$-бимодулем, а ${}_SW = {}_SW_T$ является $(S, T)$-бимодулем, то, по естественности, биекция переводит гомоморфизмы, коммутирующие с антидействием $T$, в гомоморфизмы, коммутирующие с антидействием $T$.*

**Утверждение 2** (Унитальность)**.** *Пусть $R$ — ассоциативное унитальное кольцо, $M_R$ — правый $R$-модуль. Тогда имеем следующую биекцию: $m \otimes r \mapsto mr : M_R \otimes_R {}_RR \rightleftarrows M : m \otimes 1 \leftarrow\!\shortmid m$, где ${}_RR$ — это $R$, рассматриваемое как левый модуль над собой, а $M$ — это $M_R$, рассматриваемый как абелева группа. Эта биекция естественна по $M_R$.*

## 1.3. Функторы замены кольца

**Наблюдение 1** (Функторы замены кольца)**.** Пусть $S \to R$ — гомоморфизм ассоциативных унитальных колец. Такой гомоморфизм индуцирует функтор *ограничения скаляров*: $\mathrm{res}^R_S : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$, наделяющий $R$-модуль ${}_RV$ структурой $S$-модуля с помощью сквозного гомоморфизма $S \to R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V)$, где $V$ — это ${}_RV$, рассматриваемый как абелева группа, а также индуцирует на $R = {}_RR_S = {}_SR_R$ структуры $(R, S)$-бимодуля и $(S, R)$-бимодуля. Естественные изоморфизмы унитальности $\mathrm{Hom}_R({}_RR_S, {}_RV) \leftrightarrow \mathrm{res}^R_S({}_RV) \leftrightarrow {}_SR_R \otimes_R {}_RV$ переводят изоморфизмы сопряжённости между $\otimes$ и Hom в изоморфизмы следующих сопряжённостей: ${}_RR_S \otimes_S (-) \dashv \mathrm{res}^R_S(-) \dashv \mathrm{Hom}_S({}_SR_R, -)$. Функтор ${}_RR_S \otimes_S (-)$ называется *расширением скаляров*, $\mathrm{Hom}_S({}_SR_R, -)$ — *корасширением скаляров*, а все три вместе — *функторами замены кольца.*

# 2. I-арное тензорное произведение без коэффициентов

## 2.1. Определение

**Определение 3** (I-арное тензорное произведение без коэффициентов)**.** Пусть $I$ — конечное множество, $(V_i)_{i\in I}$ — семейство абелевых групп. *Тензорное произведение* $(V_i)_{i\in I}$, обозначаемое $\bigotimes_{i\in I} V_i$, — это абелева группа, заданная образующими — формальными произведениями $\bigotimes_{i\in I} v_i$, биективными семействам $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, — и соотношениями — $(v' + v'')_{\otimes e} \otimes (\bigotimes_{i\in I\setminus\{e\}} v_i) = v'_{\otimes e} \otimes (\bigotimes_{i\in I\setminus\{e\}} v_i) + v''_{\otimes e} \otimes (\bigotimes_{i\in I\setminus\{e\}} v_i)$, где $e \in I$, $v', v'' \in V_e$, $v_i \in V_i$ для любого $i \in I \setminus \{e\}$.

*Замечание* 1 (Позиционные индексы)*.* Индекс $\otimes i$ в выражении $v_{\otimes i}$ указывает на место $v$ в формальном произведении. В таком стиле запись $I$-ой тензорной степени $V$ выглядит так: $V^{\otimes I} = \bigotimes_{i\in I} V_{\otimes i}$. Группировка тензорного произведения, которому принадлежат рассматриваемые тензорные мономы, считается ясной из контекста.

**Определение 4** (Функториальность)**.** Пусть $I$ — конечное множество. Пусть $(f_i : V_i \to V'_i)_{i\in I}$ — семейство гомоморфизмов абелевых групп. Тогда это семейство индуцирует гомоморфизм тензорных про-

изведений: $\bigotimes_{i\in I} f_i : \bigotimes_{i\in I} V_i \to \bigotimes_{i\in I} V_i'$, $\bigotimes_{i\in I} v_i \mapsto \bigotimes_{i\in I} f_i(v_i)$, называемый *тензорным произведением* семейства $(f_i)_{i\in I}$.

## 2.2. Дистрибутивность и ассоциативность

**Утверждение 3** (Дистрибутивность)**.** *Пусть $\pi : I \to J$ — отображение множеств, $J$ конечно, $(V_i)_{i\in I}$ — семейство абелевых групп. Пусть $\mathrm{Sec}(\pi) := \{\sigma : J \to I \mid \pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_J\}$. Тогда проекции на слагаемые и вложения слагаемых прямых сумм индуцируют пару взаимно обратных гомоморфизмов: $\bigotimes_{j\in J} \bigoplus_{i\in\pi^{-1}(j)} V_i \rightleftarrows \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Sec}(\pi)} \bigotimes_{j\in J} V_{\sigma(j)}$.*

**Лемма 1** (Бинарная ассоциативность)**.** *Пусть $I = I_1 \sqcup I_2$ — конечное множество, $(V_i)_{i\in I}$ — семейство абелевых групп. Тогда следующий гомоморфизм является изоморфизмом:*

$$\bigotimes_{i\in I} V_i \xrightarrow{\sim} (\bigotimes_{i\in I_1} V_i) \otimes (\bigotimes_{i\in I_2} V_i), \quad \bigotimes_{i\in I} v_i \mapsto (\bigotimes_{i\in I_1} v_i) \otimes (\bigotimes_{i\in I_2} v_i).$$

*Доказательство.* Обратный гомоморфизм задаётся по сопряжению:

$$\bigotimes_{i\in I_1} V_i \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigotimes_{i\in I_2} V_i, \bigotimes_{i\in I} V_i),\ \bigotimes_{i\in I_1} v_i \mapsto (\bigotimes_{i\in I_2} v_i \mapsto \bigotimes_{i\in I} v_i). \ \square$$

**Утверждение 4** (Ассоциативность)**.** *Пусть $\pi : I \to J$ — отображение конечных множеств, $(V_i)_{i\in I}$ — семейство абелевых групп. Тогда мы имеем следующий изоморфизм:*

$$\bigotimes_{i\in I} V_i \leftrightarrow \bigotimes_{j\in J} \bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)} V_i, \quad \bigotimes_{i\in I} v_i \leftrightarrow \bigotimes_{j\in J} \bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)} v_i.$$

*Доказательство.* Докажем индукцией по мощности $J$. Если мощность $J$ строго больше двух, представим $J$ в виде $J = J_1 \sqcup J_2$, где $J_1, J_2 \neq \varnothing$. Пусть $I_1 := \pi^{-1}(J_1)$, $I_2 := \pi^{-1}(J_2)$. По индукции получаем цепочку изоморфизмов: $\bigotimes_{i\in I} V_i \leftrightarrow (\bigotimes_{i\in I_1} V_i) \otimes (\bigotimes_{i\in I_2} V_i) \leftrightarrow (\bigotimes_{j\in J_1} \bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)} V_i) \otimes (\bigotimes_{j\in J_2} \bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)} V_i) \leftrightarrow \bigotimes_{j\in J} \bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)} V_i$. $\square$

## 2.3. Тензорное произведение колец

**Определение 5** (Тензорное произведение колец)**.** Пусть $I$ — конечное множество, $(R_i)_{i\in I}$ — семейство ассоциативных унитальных колец. Тогда на абелевой группе $\bigotimes_{i\in I} R_i$ можно определить умножение:

$$(\bigotimes_{i\in I} R_i) \otimes (\bigotimes_{i\in I} R_i) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i\in I}(R_i \otimes R_i) \to \bigotimes_{i\in I} R_i,$$
$$(\bigotimes_{i\in I} r_i') \otimes (\bigotimes_{i\in I} r_i'') \mapsto \bigotimes_{i\in I}(r_i' \otimes r_i'') \mapsto \bigotimes_{i\in I}(r_i' r_i'').$$

Первое отображение — это изоморфизм ассоциативности, а второе — это тензорное произведение отображений умножения в индивидуальных кольцах.

**Утверждение 5** (Универсальное свойство тензорного произведения колец). *Пусть $I$ — конечное множество, $(R_i)_{i\in I}$ — семейство ассоциативных унитальных колец. Тогда кольцо $\bigotimes_{i\in I} R_i$ снабжено семейством гомоморфизмов $\iota_e : R_e \to \bigotimes_{i\in I} R_i$, $r \mapsto r_{\otimes e} \otimes \bigotimes_{i\in I\setminus\{e\}} 1_{\otimes i}$, где $e \in I$, причём образы $\iota_e$ и $\iota_{e'}$ при $e \neq e'$ поэлементно коммутируют. Пусть $S$ — ассоциативное унитальное кольцо, а $(\epsilon_e : R_e \to S)_{e\in I}$ — семейство гомоморфизмов, такое что образы $\epsilon_e$ и $\epsilon_{e'}$ при $e \neq e'$ поэлементно коммутируют. Тогда существует единственный гомоморфизм $f : \bigotimes_{i\in I} R_i \to S$, такой что $f \circ \iota_e = \epsilon_e$ для любого $e \in I$.*

## 2.4. Обобщённая точность справа

**Утверждение 6** (Обобщённая точность справа). *Пусть $I$ — конечное множество, $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_i)_{i\in I}$ — семейства абелевых групп, причём $B_i$ является подгруппой $A_i$ для любого $i \in I$. Тогда следующая последовательность точна:*

$$\bigoplus_{e\in I}((B_e)_{\otimes e} \otimes (\bigotimes_{i\in I\setminus\{e\}} A_i)) \to \bigotimes_{i\in I} A_i \to \bigotimes_{i\in I}(A_i/B_i) \to 0.$$

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{X} \subset \bigotimes_{i\in I} A_i$ — это образ первого гомоморфизма. Тогда обратный к гомоморфизму $(\bigotimes_{i\in I} A_i)/\mathcal{X} \to \bigotimes_{i\in I}(A_i/B_i)$ определяется так: $\bigotimes_{i\in I}(a_i + B_i) \mapsto (\bigotimes_{i\in I} a_i) + \mathcal{X}$. Это определение корректно — образ $\bigotimes_{i\in I}(a_i+B_i)$ не зависит от выбора семейства $(a_i)_{i\in I}$. □

# 3. I-арное тензорное произведение с коэффициентами

## 3.1. Определение

**Определение 6** (Система коэффициентов). Пусть $I$ — конечное множество. Пусть $(R_{i,i'})_{(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta}$ — семейство ассоциативных унитальных колец, такое что $R_{i,i'} = R^o_{i',i}$ для любых $(i, i') \in I^{\times 2} \setminus \Delta$. Такие семейства колец будем называть *системами коэффициентов*. Мы будем

говорить, что система $(R_{i,i'})_{(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta}$ действует на семействе абелевых групп $(V_i)_{i\in I}$, если для каждого $i'\in I$ абелева группа $V_{i'}$ снабжена поэлементно коммутирующими действиями колец $R_{i,i'}$, где $i\in I\setminus\{i'\}$.

**Определение 7** (I-арное тензорное произведение с коэффициентами)**.** Пусть $I$ — конечное множество. Пусть система коэффициентов $(R_{i,i'})_{(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta}$ действует на $(V_i)_{i\in I}$. *Тензорное произведение* семейства $(V_i)_{i\in I}$ над $(R_{i,i'})_{(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta}$, обозначаемое $\bigotimes_{i\in I}^{R_{i,i'}} V_i$, — это фактор абелевой группы $\bigotimes_{i\in I} V_i$ по соотношениям типа $(v_i r_{i,i'})_{\otimes i}\otimes(\bigotimes_{k\in I\setminus\{i\}} v_k) = (r_{i,i'}v_{i'})_{\otimes i'}\otimes(\bigotimes_{k\in I\setminus\{i'\}} v_k)$, где $(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta$, $r_{i,i'}\in R_{i,i'}$, $(v_k)_{k\in I}\in\prod_{k\in I} V_k$.

**Определение 8** (Функториальность)**.** Пусть $I$ — конечное множество. Пусть система коэффициентов $(R_{i,i'})_{(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta}$ действует на $(V_i)_{i\in I}$ и $(V_i')_{i\in I}$, а $(f_i : V_i\to V_i')_{i\in I}$ — это семейство гомоморфизмов абелевых групп, такое что $f_{i'}$ коммутирует с действием $R_{i,i'}$ для каждой пары $(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta$. Тогда гомоморфизм $\bigotimes_{i\in I} f_i : \bigotimes_{i\in I} V_i\to\bigotimes_{i\in I} V_i'$ индуцирует гомоморфизм $\bigotimes_{i\in I}^{R_{i,i'}} f_i : \bigotimes_{i\in I}^{R_{i,i'}} V_i\to\bigotimes_{i\in I}^{R_{i,i'}} V_i'$. В частности, если на каждом из $V_{i'}$ задано действие некоего ассоциативного унитального кольца $R_{i'}$, поэлементно коммутирующее с действиями $R_{i,i'}$, то на абелевой группе $\bigotimes_{i\in I}^{R_{i,i'}} V_i$ индуцируется действие кольца $\bigotimes_{i\in I} R_i$.

## 3.2. Ассоциативность

**Утверждение 7** (Ассоциативность)**.** *Пусть $\pi : I\to J$ — отображение конечных множеств. Пусть на семействе абелевых групп $(V_i)_{i\in I}$ действует система коэффициентов $(R_{i,i'})_{(i,i')\in I^{\times 2}\setminus\Delta}$. Тогда изоморфизм $\bigotimes_{i\in I} V_i\leftrightarrow\bigotimes_{j\in J}\bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)} V_i$ индуцирует изоморфизм фактор-групп: $\bigotimes_{i\in I}^{R_{i,i'}} V_i\leftrightarrow\bigotimes_{j\in J}^{\mathcal{R}_{j,j'}}\bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)}^{R_{i,i'}} V_i$, где $\mathcal{R}_{j,j'}\coloneqq\bigotimes_{(i,i')\in\pi^{-1}(j)\times\pi^{-1}(j')} R_{i.i'}$.*

*Доказательство.* По теореме об обобщённой точности справа, ядро гомоморфизма $\bigotimes_{i\in I} V_i\leftrightarrow\bigotimes_{j\in J}\bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)} V_i\to\bigotimes_{j\in J}\bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)}^{R_{i,i'}} V_i$ порождено соотношениями $(v_i r_{i,i'})_{\otimes i}\otimes(\bigotimes_{k\in I\setminus\{i\}} v_k) = (r_{i,i'}v_{i'})_{\otimes i'}\otimes(\bigotimes_{k\in I\setminus\{i'\}} v_k)$, где $(i,i')\in\pi^{-1}(j)^{\times 2}\setminus\Delta$ для какого-то $j\in J$, $r_{i,i'}\in R_{i,i'}$, $(v_k)_{k\in I}\in\prod_{k\in I} V_k$. Вторая факторизация $\bigotimes_{j\in J}\bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)}^{R_{i,i'}} V_i\to\bigotimes_{j\in J}^{\mathcal{R}_{j,j'}}\bigotimes_{i\in\pi^{-1}(j)}^{R_{i,i'}} V_i$ задаётся добавлением соотношений того же типа, где $(i,i')\in\pi^{-1}(j)\times\pi^{-1}(j')$ для каких-то $j\neq j'$, так как для каждой пары $j\neq j'$ образы гомоморфизмов $R_{i,i'}\to\mathcal{R}_{j,j'}$, где $(i,i')\in\pi^{-1}(j)\times\pi^{-1}(j')$, вместе порождают $\mathcal{R}_{j,j'}$. $\square$