ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

набросок сюжета

Y. Y.

13 октября 2023 года от Р. Х.

Оглавление

Оглавление **3**

1 Вещественные числа **5**

1.1 Сечения Дедекинда 5

1.2 Компактность и связность отрезка 8

2 Дифференциальное исчисление **9**

2.1 Теорема Банаха о фиксированной точке 9

2.2 Теорема об обратной функции 10

2.3 Равенство смешанных производных 11

2.4 Лемма Адамара 11

2.5 Лемма Морса 13

Глава 1

Вещественные числа

1.1. Сечения Дедекинда

Леммы об обратимости

Определение 1 (Левые и правые сечения Дедекинда)**.** Назовём подмножество R линейно упорядоченного множества X *правым сечением Дедекинда*, если оно непустое и собственное, не имеет минимального элемента, и если для любых $r \in R$ и $x \in X$, таких что $r \leqslant x$, выполняется включение $x \in R$. Назовём подмножество $L \subset X$ *левым сечением Дедекинда*, если оно является правым сечением Дедекинда относительно противоположного порядка на X.

Определение 2 (Дедекиндовы дополнения и пары)**.** Пусть X — это $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}_{>0}$. Левое сечение Дедекинда $L \subset X$ и правое сечение Дедекинда $R \subset X$ называются *дедекиндовыми дополнениями* друг друга, а пара (L, R) — *дедекиндовой парой*, если $L \cap R = \varnothing$, и для любого рационального $\varepsilon > 0$ существуют $l \in L$ и $r \in R$, такие что $r - l \leqslant \varepsilon$.

Наблюдение 1. Пусть X — это $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}_{>0}$. Дизъюнктные левое сечение Дедекинда $L \subset X$ и правое сечение Дедекинда $R \subset X$ являются дедекиндовыми дополнениями друг друга тогда и только тогда, когда для любого рационального $\varepsilon > 0$ открытая ε-окрестность множества L имеет непустое пересечение с R, то есть $\{x \in X \mid \exists l \in L : |x - l| < \varepsilon\} \cap R \neq \varnothing$, или, эквивалентно, открытая ε-окрестность множества R имеет непустое пересечение с L, то есть $L \cap \{x \in X \mid \exists r \in R : |x - r| < \varepsilon\} \neq \varnothing$.

Эти условия эквивалентны тому, что L — максимальное по включению левое сечение Дедекинда, дизъюнктное с R, а R — максимальное по включению правое сечение Дедекинда, дизъюнктное с L. Отсюда следует, что у любого левого/правого сечения Дедекинда в X существует единственное дедекиндово дополнение.

Определение 3 («Поэлементное» сложение, умножение и обращение подмножеств)**.** Для подмножеств $M, M', M'' \subset \mathbb{Q}$, в частности, левых или правых сечений Дедекинда, определим множества $-M := \{-x \in \mathbb{Q} \mid x \in M\}$, $M' + M'' := \{x' + x'' \in \mathbb{Q} \mid x' \in M',\ x'' \in M''\}$ и $M' \cdot M'' := \{x' \cdot x'' \in \mathbb{Q} \mid x' \in M',\ x'' \in M''\}$. Если $M \subset \mathbb{Q}^\times$, то определим множество $M^{:(-1)} := \{x^{-1} \in \mathbb{Q} \mid x \in M\}$.

Определение 4 (Сложение дедекиндовых пар в $\mathbb{Q}$)**.** Пусть (L', R') и (L'', R'') — дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}$. Определим их сумму как дедекиндову пару $(L' + L'', R' + R'')$.

Наблюдение 2. Дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}$ образуют абелеву группу относительно сложения. Нулём в этой группе является пара $(\mathbb{Q}_{<0}, \mathbb{Q}_{>0})$, а аддитивно обратной к паре (L, R) является пара $(-R, -L)$.

Лемма 1. *Пусть (L, R) — дедекиндова пара в $\mathbb{Q}_{>0}$. Тогда $(R^{:(-1)}, L^{:(-1)})$ — это дедекиндова пара в $\mathbb{Q}_{>0}$.*

Набросок доказательства. Заметим, что существует $C \in \mathbb{Q}_{>0}$, такое что если $l \in L$ и $r \in R$ достаточно близки, то $C \leqslant l \leqslant r$, после чего воспользуемся тождеством $1/l - 1/r = (r - l)/(lr)$. □

Лемма 2. *Пусть (L', R') и (L'', R'') — дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}_{>0}$. Тогда $(L' \cdot L'', R' \cdot R'')$ — это дедекиндова пара в $\mathbb{Q}_{>0}$.*

Набросок доказательства. Заметим, что существует $C' \in \mathbb{Q}_{>0}$, такое что если $l' \in L'$ и $r' \in R'$ достаточно близки, то $l' \leqslant r' \leqslant C'$, и аналогично для пары (L'', R''), после чего воспользуемся тождеством $r'r'' - l'l'' = r'(r'' - l'') + (r' - l')l''$. □

Определение 5 (Умножение дедекиндовых пар в $\mathbb{Q}_{>0}$)**.** Пусть (L', R') и (L'', R'') — дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}_{>0}$. Определим их произведение как дедекиндову пару $(L' \cdot L'', R' \cdot R'')$.

Наблюдение 3. Дедекиндовы пары в $\mathbb{Q}_{>0}$ образуют коммутативную группу относительно умножения. Единицей в этой группе является пара $(\{x \in \mathbb{Q}_{>0} \mid x < 1\}, \{x \in \mathbb{Q}_{>0} \mid 1 < x\})$, а мультипликативно обратной к паре (L, R) является пара $(R^{:(-1)}, L^{:(-1)})$.

Конструкция поля дедекиндовых сечений

Определение 6 (Сечение Дедекинда)**.** Правые сечения Дедекинда в $\mathbb{Q}$ будем называть просто *сечениями Дедекинда.*

Определение 7 (Отношение порядка на сечениях Дедекинда)**.** Стандартным порядком на множестве сечений Дедекинда будем считать порядок, противоположный порядку, заданному вложенностью сечений друг в друга как множеств.

Наблюдение 4. Легко видеть, что порядок на множестве сечений Дедекинда линейный и полный: инфимумам соответствуют объединения.

Определение 8 (Сложение сечений Дедекинда)**.** Суммой сечений Дедекинда R' и R'' назовём сечение Дедекинда $R' + R''$.

Наблюдение 5. Сечения Дедекинда образуют упорядоченную аддитивную абелеву группу. Аддитивная обратимость любого сечения Дедекинда следует из наблюдения 2.

Определение 9 (Умножение неотрицательных сечений Дедекинда)**.** Пусть R' и R'' — неотрицательные, то есть такие, что $R' \geqslant 0$ и $R'' \geqslant 0$, сечения Дедекинда. Определим их произведение как неотрицательное сечение Дедекинда $R' \cdot R''$.

Наблюдение 6. Множество неотрицательных сечений Дедекинда образует полукольцо с нулём. Если мы отождествим множество всех сечений Дедекинда с кольцом Гротендика, то есть кольцом формальных разностей, этого полукольца, то увидим, что операция умножения неотрицательных сечений Дедекинда однозначно двусторонне дистрибутивно продолжается на множество всех сечений Дедекинда, превращая его в упорядоченное кольцо.

Наблюдение 7. По наблюдению 3 строго положительные, то есть строго большие нуля, сечения Дедекинда мультипликативно обратимы, откуда следует, что кольцо сечений Дедекинда является полем. Часто

оно отождествляется с полем *вещественных чисел*, также называемых *действительными числами*, и обозначается символом $\mathbb{R}$.

1.2. Компактность и связность отрезка

Определение 1 (Интервал)**.** Назовём подмножество $I \subset X$ частично упорядоченного множества X *интервалом*, если для любых $x, y \in I$ и $z \in X$, таких что $x \leqslant z \leqslant y$, выполняется включение $z \in I$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U} \subset \mathrm{Open}([0,1])$ — множество открытых подмножеств отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$, такое что $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ замкнуто в $[0,1]$ и не пусто. Тогда $[0,1]$ является конечным объединением элементов $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Так как объединение элементов $\mathcal{U}$ не пустое, то существует непустой интервал $I \subset [0,1]$, содержащийся в каком-то из элементов $\mathcal{U}$. Пусть $I_{\max} \subset [0,1]$ — это объединение интервалов, содержащих I и содержащихся в конечных объединениях элементов $\mathcal{U}$, а $C_{\inf} := \inf(I_{\max}) \in [0,1]$ и $C_{\sup} := \sup(I_{\max}) \in [0,1]$ — это инфимум и супремум $I_{\max}$. Тогда $C_{\inf}, C_{\sup} \in \mathrm{Cl}(I_{\max}) \subset \mathrm{Cl}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, поэтому существуют открытые в $[0,1]$ интервалы $I_{\inf} \ni C_{\inf}$ и $I_{\sup} \ni C_{\sup}$, содержащиеся в каких-то элементах $\mathcal{U}$. Так как $I_{\inf} \cap I_{\max} \neq \varnothing$ и $I_{\sup} \cap I_{\max} \neq \varnothing$, то существуют интервалы I_{left} и I_{right}, содержащие I и содержащиеся в конечных объединениях элементов $\mathcal{U}$, такие что $I_{\inf} \cap I_{\mathrm{left}} \neq \varnothing$ и $I_{\sup} \cap I_{\mathrm{right}} \neq \varnothing$. Тогда $I_{\mathrm{big}} := I_{\inf} \cup I_{\mathrm{left}} \cup I_{\mathrm{right}} \cup I_{\sup}$ — это интервал, содержащий I и содержащийся в конечном объединении элементов $\mathcal{U}$. Если $C_{\inf} \neq 0$ или $C_{\sup} \neq 1$, то I_{big} строго больше $I_{\max}$, что противоречит определению $I_{\max}$. Поэтому $I_{\mathrm{big}} = I_{\max} = [0,1]$. □

Следствие 1 (Компактность и связность отрезка)**.** *Единичный вещественный отрезок $[0,1] \subset \mathbb{R}$ компактен и связен.*

Доказательство. Компактность следует из теоремы 1, применённой для случая $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = [0,1]$, а связность — применённой для случая одноэлементного $\mathcal{U}$. □

Глава 2

Дифференциальное исчисление

2.1. Теорема Банаха о фиксированной точке

Определение 1 (Растяжение и липшицевость)**.** Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, а $\varphi : X \to Y$ — отображение. Супремум вещественных чисел $\rho_Y(\varphi(x'), \varphi(x''))/\rho_X(x', x'')$ по всем парам $(x', x'') \in X \times X$, таким что $x' \neq x''$, называется *растяжением* φ. Если этот супремум конечен, то отображение φ называется *липшицевым*.

Теорема 1 (Теорема Банаха о фиксированной точке)**.** *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а $\varphi : X \to X$ — отображение, растяжение которого строго меньше единицы. Тогда у φ существует единственная фиксированная точка.*

Доказательство. Единственность очевидна — остальные точки обязаны приближаться к фиксированной. Теперь докажем существование. Обозначим растяжение φ через λ и выберем произвольную точку $x \in X$. Из неравенств $\rho(\varphi^{\circ(n+1)}(x), \varphi^{\circ(n+2)}(x)) \leqslant \lambda \cdot \rho(\varphi^{\circ n}(x), \varphi^{\circ(n+1)}(x))$, где $n \in \mathbb{N}_0$, следует, что расстояния между членами последовательности $(\varphi^{\circ n}(x))_{n=0}^{\infty}$ не больше расстояний между соответствующими членами последовательности $(c \cdot s_n)_{n=0}^{\infty}$, где $c \coloneqq \rho(x, \varphi(x))$, $s_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}$. Так как последовательность $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ сходится, то она является последовательностью Коши, откуда следует, что последовательность $(\varphi^{\circ n}(x))_{n=0}^{\infty}$ является последовательностью Коши, и, как следствие, сходится. Пре-

дел и будет фиксированной точкой, так как из непрерывности φ следует, что $\varphi(\lim_{n\to\infty}\varphi^{\circ n}(x)) = \lim_{n\to\infty}\varphi(\varphi^{\circ n}(x)) = \lim_{n\to\infty}\varphi^{\circ n}(x)$. $\square$

2.2. Теорема об обратной функции

Теорема 1 (Неравенство Лагранжа). *Пусть E — евклидово пространство, а $\gamma : [0,1] \to E$ — непрерывное отображение, дифференцируемое на интервале $(0,1)$. Тогда существует точка $x \in (0,1)$, такая что $|\gamma(1) - \gamma(0)| \leqslant \|D(\gamma)_x\|$.*

Набросок доказательства. Пусть L — это прямая, проходящая через $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$, а $\pi : E \to L$ — это ортогональная проекция на L. Так как дифференциалы π во всех точках имеют норму не больше 1, то замена γ на $\pi \circ \gamma$ сводит доказательство теоремы к случаю одномерного E, где она следует из классической теоремы Лагранжа о среднем. $\square$

Теорема 2. *Пусть E — это евклидово пространство, а $\varphi : E \to E$ — это дифференцируемое отображение, такое что $\varphi(0) = 0$, отображение $D(\varphi)_0$ биективно, а отображение $x \mapsto D(\varphi)_x : E \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-mod}}(E,E)$ непрерывно в нуле. Тогда существует открытая окрестность нуля $U \subset E$, такая что $\varphi(U)$ открыто, а $x \mapsto \varphi(x) : U \to \varphi(U)$ биективно.*

Доказательство. Сначала сделаем два наблюдения. Во-первых, для любого $y \in E$ решения уравнения $\varphi(x) = y$ совпадают с фиксированными точками отображения $\psi_y : E \to E$, $x \mapsto \varphi(x) + x - y$. Во-вторых, без потери общности можно предположить, что $D(\varphi)_0 = -\mathrm{Id}$, заменив φ на $-(D(\varphi)_0)^{\circ(-1)} \circ \varphi$. Тогда $D(\psi_y)_0 = 0$ для всех $y \in E$.

Теперь зафиксируем два вещественных числа $\varepsilon, \rho > 0$, таких что $\varepsilon + \rho = 1$. Так как $D(\psi_0)_0 = 0$, а отображение $x \mapsto D(\psi_0)_x \mapsto \|D(\psi_0)_x\| : E \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-mod}}(E,E) \to \mathbb{R}$ непрерывно в нуле, то мы можем найти вещественное число $R > 0$, такое что для любого $x \in E$, удовлетворяющего условию $|x| \leqslant R$, выполняется неравенство $\|D(\psi_0)_x\| \leqslant \varepsilon$, эквивалентное неравенству $\|D(\psi_y)_x\| \leqslant \varepsilon$ для произвольного $y \in E$.

Согласно неравенству Лагранжа (теорема 1) для любого $y \in E$ растяжение ограничения ψ_y на замкнутый шар $\{x \in E \mid |x| \leqslant R\}$ не превосходит ε. В частности, $|\psi_0(x)| \leqslant \varepsilon R$ для всех $x \in E$, таких что $|x| \leqslant R$, и $|\psi_y(x)| = |\psi_0(x) + y| < R$ для всех $x, y \in E$, таких что $|x| \leqslant R$ и $|y| < \rho R$.

Зафиксируем произвольный $y \in E$, такой что $|y| < \rho R$, и применим теорему Банаха о фиксированной точке к отображению $x \mapsto \psi_y(x) : \{x \in E \mid |x| \leqslant R\} \to \{x \in E \mid |x| \leqslant R\}$. Мы получим, что существует единственная точка $x \in E$, такая что $|x| \leqslant R$ и $\varphi(x) = y$, причём $|x| = |\psi_y(x)| < R$. Множество $U \coloneqq \{x \in E \mid |x| < R\} \cap \varphi^{-1}(\{y \in E \mid |y| < \rho R\})$, для которого $\varphi(U) = \{y \in E \mid |y| < \rho R\}$, подходит условию теоремы. □

2.3. Равенство смешанных производных

Теорема 1 (Равенство смешанных производных). *Пусть $U = U' \times U'' \subset \mathbb{R}^2$ — открытая окрестность нуля, а $f : U \to \mathbb{R}$ — функция, такая что $f(0) = 0$, вторая частная производная $\partial_2\partial_1 f$ существует во всех точках U и непрерывна в нуле. Пусть $g : U \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) - f(0, x_2)$. Тогда $\partial_2\partial_1 f(0) = \lim_{x_1,x_2\to 0}(g(x_1, x_2)/(x_1x_2))$.*

Доказательство. Зафиксируем точку $(x_1, x_2) \in U$. Применив теорему Лагранжа о среднем к функции $\alpha \mapsto g(\alpha x_1, x_2) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, получаем, что $g(x_1, x_2) = x_1\partial_1 g(\alpha_1 x_1, x_2)$ для какого-то $\alpha_1 \in (0, 1)$. Применив теорему Лагранжа о среднем к функции $\alpha \mapsto x_1\partial_1 g(\alpha_1 x_1, \alpha x_2) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, получаем, что $g(x_1, x_2) = x_1x_2\partial_2\partial_1 g(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)$ для какого-то $\alpha_2 \in (0, 1)$. Заметив, что $\partial_2\partial_1 g = \partial_2\partial_1 f$ как функции на U, и устремив x_1 и x_2 к нулю, получаем, что $\partial_2\partial_1 f(0) = \lim_{x_1,x_2\to 0}(g(x_1, x_2)/(x_1x_2))$. □

2.4. Лемма Адамара

Обозначение 1. Пусть $n \geqslant i \geqslant 0$ — целые числа. Символом C_n^i будем обозначать биноминальный коэффициент, равный $n!/(i!(n - i)!)$.

Наблюдение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}_1$. В результате разложения выражения $(1 - 1)^n$ по биному Ньютона получается формула $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0$.

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}_1$, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция класса C^n, такая что $f(0) = 0$. Пусть $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)/x$, а $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда существуют вещественные числа $\alpha_i \in (0, 1)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, такие что $g^{(n-1)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i f^{(n)}(\alpha_i t)$. Помимо этого, если f класса C^{n+1}, то существуют вещественные числа $\beta_i \in (0, 1)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, такие что $g^{(n-1)}(t) = \frac{1}{n} f^{(n)}(0) + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_{n+1}^{i+1} f^{(n+1)}(\beta_i t)t$.*

Доказательство. Применяя правило Лейбница, получаем равенство $g^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1}(-1)^{i-1}(i-1)!t^{-i}f^{(n-i)}(t)$. По теореме Тейлора для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ существует вещественное число $\alpha_i \in (0,1)$, такое что $f^{(n-i)}(t) = (\sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!}f^{(n-i+j)}(0)t^j) + \frac{1}{i!}f^{(n)}(\alpha_i t)t^i$. Подставив это выражение в выражение для $g^{(n-1)}(t)$ и произведя необходимые сокращения, получаем первую формулу.

Вторая формула аналогичным образом получается подстановкой выражения $f^{(n-i)}(t) = (\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!}f^{(n-i+j)}(0)t^j) + \frac{1}{(i+1)!}f^{(n+1)}(\beta_i t)t^{i+1}$, где $\beta_i \in (0,1)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$, в выражение для $g^{(n-1)}(t)$. □

Замечание 1. По первой формуле леммы 1 сразу вычисляется предел $\lim_{t\to 0} g^{(n-1)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i f^{(n)}(0) = \frac{1}{n}f^{(n)}(0)$, а по второй — предел $\lim_{t\to 0}((g^{(n-1)}(t) - \frac{1}{n}f^{(n)}(0))/t) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_{n+1}^{i+1}f^{(n+1)}(0) = \frac{1}{n(n+1)}(C_{n+1}^1 - C_{n+1}^0)f^{(n+1)}(0) = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$.

Теорема 1 (Лемма Адамара)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — функция класса C^n, где $n \in \mathbb{N}_1$, а $l : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — ненулевая линейная функция, такая что $\{x \in \mathbb{R}^m \mid l(x) = 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = 0\}$. Тогда существует единственная функция $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ класса C^{n-1}, такая что $f = g \cdot l$.*

Набросок доказательства. Мы можем предположить, что в $\mathbb{R}^m$ выбраны координаты, а l — это отображение $(x_i)_{i=1}^m \mapsto x_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Сначала рассмотрим случай $n = 1$. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, причём $x_1 \neq 0$. Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)/x_1 = \partial_1 f(\alpha x_1, x_2, \ldots, x_m)$ для какого-то $\alpha \in (0,1)$. Это показывает, что функция $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, которая переводит $x \in \mathbb{R}^m$ в $f(x)/l(x)$ при $l(x) \neq 0$, и в $\partial_1 f(x)$ при $l(x) = 0$, является непрерывной и подходит в качестве g. Единственность g очевидна.

Теперь рассмотрим случай $n \geqslant 2$. Пусть $(k_i)_{i=1}^m$ — семейство элементов $\mathbb{N}_0$, такое что $\sum_{i=1}^m k_i \leqslant n-1$. Нам нужно доказать, что функция $\partial_1^{k_1}\cdots\partial_m^{k_m} g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ существует и непрерывна. Очевидная непосредственная проверка показывает, что функция $\hat{g} \coloneqq \partial_2^{k_2}\cdots\partial_m^{k_m} g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ существует и является в точности единственной непрерывной функцией на $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющей равенству $\hat{f} = \hat{g} \cdot l$, где $\hat{f} \coloneqq \partial_2^{k_2}\cdots\partial_m^{k_m} f$.

Доказательство существования и непрерывности функции $\partial_1^{k_1}\hat{g}$ получается последовательным применением двух формул леммы 1 к ограничениям $\hat{f}$ на слои проекции $(x_i)_{i=1}^m \mapsto (x_i)_{i=2}^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$. □

Следствие 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — функция класса C^n, где $n \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$, такая что $f(0) = 0$. Пусть $l_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$,*

— стандартные координатные функции. Тогда существуют функции $g_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *класса* C^{n-1}*, где* $1 \leqslant i \leqslant m$*, такие что* $f = \sum_{i=1}^m g_i \cdot l_i$*.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по m. Введём обозначение $H := \{x \in \mathbb{R}^m \mid l_m(x) = 0\}$. По предположению индукции ограничение $f|_H : H \to \mathbb{R}$ представляется в виде $\sum_{i=1}^{m-1} \hat{g}_i \cdot \hat{l}_i$, где $\hat{g}_i$ имеют класс C^{n-1}, а $\hat{l}_i$ — это стандартные координатные функции. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant m-1$ возьмём $g_i := \hat{g}_i \circ \pi$, где $\pi : \mathbb{R}^m \to H$ — стандартная проекция. По теореме 1 функция $f - (f|_H \circ \pi) = f - \sum_{i=1}^{m-1} g_i \cdot l_i$ представляется в виде $g_m \cdot l_m$, где g_m имеет класс C^{n-1}. □

Замечание 2. Часто леммой Адамара называется следствие 1, а не теорема 1.

2.5. Лемма Морса

Теорема 1. *Пусть* A *— ассоциативное коммутативное унитальное локальное кольцо,* $\mathfrak{m} \subset A$ *— его максимальный идеал, а* $k := A/\mathfrak{m}$*, причём* $\mathrm{char}(k) \neq 2$*. Пусть* M *— конечно порождённый* A*-модуль, снабжённый симметрической билинейной формой* $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle_A : M \times M \to A$*, такой что индуцированная форма* $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle_k : \overline{M} \times \overline{M} \to k$*, где* $\overline{M} := M/\mathfrak{m}M$*, невырождена. Тогда существует изоморфизм* $M \xrightarrow{\sim} A^r$*, где* $r := \dim_k(\overline{M})$*, который переводит форму* $\langle -, -\rangle_A$ *в диагональную форму с элементами* $A^\times$ *на диагонали.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по r. Если $r = 0$, то $M = 0$ по лемме Накаямы. Теперь рассмотрим случай $r \geqslant 1$. Пусть $\overline{v} \in \overline{M}$ — вектор, такой что $\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle_k \in k^\times$, а $v \in M$ — его поднятие. Тогда $\langle v, v\rangle_A \in A^\times$, откуда, в частности, следует, что отображение $\alpha \mapsto \alpha v : A \to Av$ биективно, так как если $\alpha v = 0$, где $\alpha \in A$, то $\langle \alpha v, v\rangle_A = \alpha\langle v, v\rangle_A = 0$, откуда следует, что $\alpha = 0$. Так как индуцированные билинейные формы на Av и $k\overline{v}$ невырождены, то мы получаем разложения $M = Av \oplus (Av)^\perp$ и $\overline{M} = k\overline{v} \oplus (k\overline{v})^\perp$, причём отображение редукции $M \to \overline{M}$ переводит $(Av)^\perp$ в $(k\overline{v})^\perp$ сюръективно, что завершает доказательство по индукции. □

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 кольцо* A *— это кольцо ростков в точке* 0 *функций класса* C^n*, где* $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$*, из* $\mathbb{R}^m$ *в* $\mathbb{R}$*, то*

форма $\langle -,-\rangle_A$ приводится к диагональному виду с ± 1 на диагонали, причём количества $+1$ и -1 определяются однозначно и задаются сигнатурой формы $\langle -,-\rangle_k$, где $k = A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{R}$.

Доказательство. Первое утверждение является следствием теоремы 1 и того, что группа $A^\times/(A^\times)^{:2}$ состоит из двух элементов — классов $\pm 1 \in A^\times$. Второе утверждение очевидно. □

Теорема 2 (Лемма Морса)**.** *Пусть f — росток в точке 0 функции класса C^{n+2}, где $n \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$, из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, такой что $f(0) = 0$, $(\partial_i f(0))_{i=1}^m = 0$, а матрица $(\partial_i\partial_j f(0))_{i,j=1}^m$ невырождена. Пусть вещественная квадратичная форма, заданная матрицей $(\partial_i\partial_j f(0))_{i,j=1}^m$, эквивалентна квадратичной форме $\sum_{i=1}^m a_i X_i^2$, где $a_i \in \{\pm 1\}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда существует семейство $(u_i)_{i=1}^m$ ростков в точке 0 функций класса C^n из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, таких что $u_i(0) = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, матрица $(\partial_i u_j(0))_{i,j=1}^m$ невырождена, а $f = \sum_{i=1}^m a_i u_i^2$.*

Доказательство. Применив лемму Адамара к f, получаем разложение $f = \sum_{i=1}^m g_i l_i$, где l_i обозначает росток i-ой координатной функции, а g_i для $1 \leqslant i \leqslant m$ — это ростки функций класса C^{n+1}. Прямое вычисление по правилу Лейбница показывает, что для любого $1 \leqslant i \leqslant m$ выполняется равенство $\partial_i f(0) = g_i(0)$. Применив лемму Адамара к функциям g_i, где $1 \leqslant i \leqslant m$, получаем разложение $f = \sum_{i,j=1}^m h_{i,j} l_i l_j$, где $h_{i,j}$ для $1 \leqslant i, j \leqslant m$ — это ростки функций класса C^n. Заменив $h_{i,j}$ на $(h_{i,j} + h_{j,i})/2$ для каждой пары $1 \leqslant i, j \leqslant m$, можно предположить, что $h_{i,j} = h_{j,i}$ для любых $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Прямое вычисление по правилу Лейбница показывает, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant m$ выполняется равенство $\partial_i\partial_j f(0) = 2 \cdot h_{i,j}(0)$, в частности, матрица $(h_{i,j}(0))_{i,j=1}^m$ невырождена.

Пусть A — это кольцо ростков в точке 0 функций класса C^n из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$. Тогда по следствию 1 существует матрица $(s_{i,j})_{i,j=1}^m \in \mathrm{GL}_m(A)$ такая что $\sum_{i=1}^m a_i(\sum_{j=1}^m s_{i,j} X_j)^2 = \sum_{i,j=1}^m h_{i,j} X_i X_j$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ возьмём $u_i \coloneqq \sum_{j=1}^m s_{i,j} l_j$. Прямое вычисление по правилу Лейбница показывает, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant m$ выполняется равенство $\partial_i u_j(0) = s_{j,i}(0)$, в частности, матрица $(\partial_i u_j(0))_{i,j=1}^m$ невырождена. □