

51. 求  $(2-x)^9$  的展式中  $x^5$  項的係數。

(4 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

2. 考慮下列  $x, y, z$  的線性方程組

$$\begin{cases} x - 7y + 7z = 0 \\ x - ky + 3z = 0, \text{ 其中 } k \text{ 為實數。} \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$$

若上述方程組有平凡解，求  $k$  的兩個可取值。

(4 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

3. 以數學歸納法，證明對所有正整數  $n$ ， $4^n + 15n - 1$  可被 9 整除。

(5 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

4. (a) 設  $x = \tan \theta$ ，證明  $\frac{2x}{1+x^2} = \sin 2\theta$ 。

(b) 利用 (a)，求  $\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$  的最大值，其中  $x$  為實數。

(5 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

5. (a) 已知對任意實數  $x$  ,  $\cos(x + 1) + \cos(x - 1) = k \cos x$  。求  $k$  的值。

(b) 不用計數機，求  $\begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 \\ \cos 3 & \cos 5 & \cos 6 \\ \cos 7 & \cos 8 & \cos 9 \end{vmatrix}$  的值。

(6 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

6. 從基本原理求  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right)$  。

(4 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

7. 設  $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$  。

(a)  $f'(x)$  及  $f''(x)$  。

(b) 求  $x$  的值使  $f''(x) - f'(x) + f(x) = 0$ ，其中  $0 \leq x \leq \pi$  。

DSE.zone  
(5 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

8. (a) 利用代換積分法，求  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$  。

(b) 利用分部積分法，求  $\int \ln x dx$  。

(8 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

9. 求與曲線  $x^2 - xy - 2y^2 - 1 = 0$  相切並與直線  $y = 2x + 1$  平行的兩條切線的方程。 (6分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

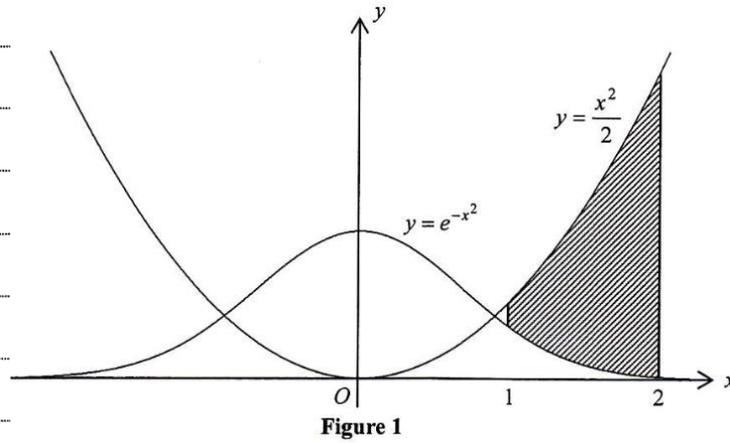
www.DSE.zone

10.(a) 求  $\int xe^{-x^2} dx$  。

(b) 圖 1 所示陰影部分由曲線  $y = \frac{x^2}{2}$  及  $y = e^{-x^2}$  圍成，其中  $1 \leq x \leq 2$  。

現把該陰影部分繞  $y$  軸旋轉，得一旋轉體，求該旋轉體的體積。

(6 marks)



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

10. 設  $A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\alpha\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  其中  $\alpha$  和  $\beta$  為 distinct 實數。設  $I$  為  $2 \times 2$  單位矩陣。

(a) 證明  $A^2 = (\alpha + \beta)A - \alpha\beta I$  。 (2分)

(b) 使用(a)，或其他方法，證明  $(A - \alpha I)^2 = (\beta - \alpha)(A - \alpha I)$  和  $(A - \beta I)^2 = (\alpha - \beta)(A - \beta I)$  。 (3分)

(c) 設  $X = s(A - \alpha I)$  和  $Y = t(A - \beta I)$  其中  $s$  和  $t$  為實數。

設  $A = X + Y$  。

(i) 求  $s$  和  $t$  以  $\alpha$  和  $\beta$  表示。

(ii) 對於任意正整數  $n$ ，證明

$$X^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I) \text{ 和 } Y^n = \frac{\alpha^n}{\alpha - \beta}(A - \beta I) \text{ 。$$

(iii) 對於任意正整數  $n$ ，表  $A^n$  以  $pA + qI$  形式，其中  $p$  和  $q$  為實數。

[Note: 已知任何  $2 \times 2$  矩陣  $H$  和  $K$ ，

If  $HK = KH = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $(H + K)^n = H^n + K^n$  for 任意正整數  $n$  ] (9分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone

12. 設  $\vec{OA} = \mathbf{i}$  ,  $\vec{OB} = \mathbf{j}$  和  $\vec{OC} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  (見圖 2) 。設  $M$  和  $N$  分別為直線  $AB$  和  $OC$  上的點 , 使得  $AM:MB = a:(1-a)$  和  $ON:NC = b:(1-b)$  其中  $0 < a < 1$  和  $0 < b < 1$  。 假設  $MN$  同時垂直於  $AB$  和  $OC$  。

(a)(i) 證明  $\vec{MN} = (a+b-1)\mathbf{i} + (b-a)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$  。

(ii) 求  $a$  和  $b$  的值。

(iii) 求直線  $AB$  與  $OC$  之間的最短距離。(8分)

(b)(i) 求  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  。

(ii) 設  $G$  為  $O$  點在平面  $ABC$  上的投影, 求直線  $OG$  與  $MN$  的交點的坐標。(5分)

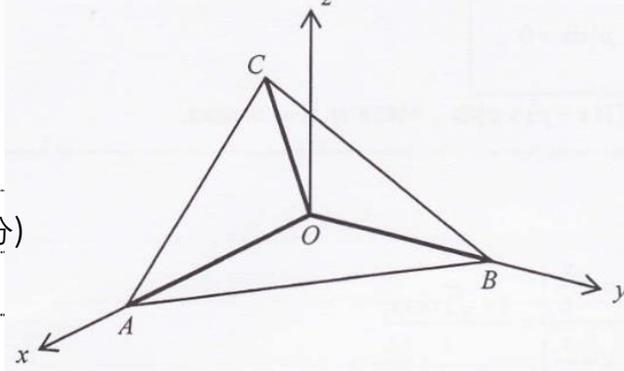


Figure 2

寫於邊界以外的答案, 將不予評閱。

www.DSE.zone

13. (a) 設  $f(x)$  於  $-p \leq x \leq p$  為奇函數，其中  $p$  為正常數。 (4 marks)

證明  $\int_0^{2p} f(x-p) dx = 0$ 。由此計算  $\int_0^{2p} [f(x-p) + q] dx$ ，其中  $q$  為常數。

(b) 證明  $\frac{\sqrt{3} + \tan(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - \tan(x - \frac{\pi}{6})} = \frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{2}$ 。 (2 marks)

(c) 利用(a)和(b)，或其他方法，計算  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1 + \sqrt{3} \tan x) dx$ 。 (4 marks)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

www.DSE.zone